Mathe III.1 Übungsblatt Nr.14

Aufgabe 1: Hotel Bernoulli

Hotel Bernoulli hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf die Hotelleitung entgegennehmen, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% annulliert wird? Das Hotel kann es sich leisten, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0025 in Verlegenheit zu kommen, ohne seinen guten Ruf zu verlieren

<u>HINWEIS:</u> Benutzen sie die Normalapproximation der Binomialverteilung.

Lösung:
Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit $q = 0.2$ mit der eine Reservierung annulliert wird. Somit auch die Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ mit der eine Reservierung auch tatsächlich wahrgenommen wird. Gesucht ist die Anzahl der Reservierungen *N* die von der Hotelleitung verwaltet werden sollen. $\Rightarrow X \sim Bi(N, p)$ Das Hotel kann es sich leisten mehr als 200 Betten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0025 zu vermieten ohne dabei seinen guten Ruf zu verlieren.
$\Rightarrow P(X > 200) = 0.0025 \Rightarrow P(X \leq 200) = 0.9975$

Durchführung der Berechnung von *N* mit Hilfe der Normalapproximation:

$$X^* \sim N(0,1) \Rightarrow P(X^* \leq 200.5^*) = 0.9975$$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}(200.5^*) = 0.9975 \Leftrightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{200.5-\mu}{\sigma}\right) = 0.9975$$

$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.9975) = 2.8$$

$$\Rightarrow 200.5 - \mu = 2.8 * \sigma \Leftrightarrow 200.5 - EX = 2.8 * \sqrt{D^2 X} \Leftrightarrow 200.5 - Np = 2.8\sqrt{Npq}$$

$$\Rightarrow 200.5 = 2.8\sqrt{0.8 * 0.2} * \sqrt{N} + 0.8N \Leftrightarrow 200.5 = 2.8 * 0.4 * \sqrt{N} + 0.8N \Leftrightarrow \frac{200.5}{0.8} = \frac{1.12}{0.8}\sqrt{N} + N$$

$$\Rightarrow \frac{200.5}{0.8} = 1{,}14\sqrt{N} + N + 0.7^2 - 0.7^2 \Leftrightarrow 250.625 + 0.7^2 = N + 1.14\sqrt{N} + 0.7^2 \Leftrightarrow 251.115 = \left(\sqrt{N} + 0.7\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{251.115} - 0.7 = \sqrt{N} \Leftrightarrow 15.847 - 0.7 = \sqrt{N} \Leftrightarrow 15.147^2 = N \Leftrightarrow 229.432 \approx N$$

$\Rightarrow$ Die Hotelleitung kann bis zu 229 Betten vermieten um mit einem geringen Risiko von 0.25% zu riskieren in Verlegenheit zu kommen.
$\Rightarrow X \sim Bi(229{,}0.8)$

Aufgabe 2:Reichweite

Für die Reichweite X eines Fahrzeuges bei vollem Tank werden für normale Fahrbedingungen vom Werk die Werte $EX = 400km$ und $D^2 X = 10^2\,km$ angegeben. Es kann Normalverteilung angenommen werden.

a) Wie hoch ist das Risiko, unterwegs stehen zu bleiben, wenn man eine Strecke von $385km$ ohne Nachtanken fahren möchte?
b) Wie weit dürfen zwei Tankstellen entfernt sein, wenn man nur ein Risiko von höchstens 3% eingehen möchte?

Lösung:
X = Reichweite eines Fahrzeuges bei vollem Tank.
$X \sim N(400,100)$

a) Gefragt ist nach $P(X \leq 385)$:
$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{385-\mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{385-400}{10}\right) \Leftrightarrow \Phi_{0,1}(-1.5) \Leftrightarrow 1-\Phi_{0,1}(1.5) \approx 1-0.9332 \approx 0.0668$$
Das Risiko während einer Strecke von $385km$ bei voll getanktem Auto stehen zu bleiben liegt bei 6,6%

b) Gefragt ist nach $P(X \leq y) = 0.03$:
$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{y-400}{10}\right) = 0.03$$
$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.03) = -1.881$$
$$\Rightarrow \frac{y-400}{10} = -1.881 \Leftrightarrow y-400 = -18.81 \Leftrightarrow y = 381.19$$
Zwei Tankstellen dürfen höchstens $381.19km$ voneinander entfernt sein, damit das Risiko während der Fahrt bei voll getanktem Auto stehen zu bleiben bei höchstens 3% liegt.