Mathe III.1 Übungsblatt Nr.13

Aufgabe 1: Verteilung Aufgabe 6.

Die Reißfestigkeit *X(in N)* von Mineralfasern wird als angenähert $N(\mu, \sigma^2)$–verteilt angenommen. Zur Ermittlung von μ und σ wurde festgestellt, dass 5% der Proben bei einer Belastung von weniger als 15 N und 91% der Proben bei einer Belastung von weniger als 28 N rissen. Berechnen sie μ und σ.

Lösung:
Aus der Aufgabenstellung lässt sich entnehmen, dass die Verteilung von X annähernd normalverteilt ist. Außerdem ist durch Stichproben bekannt, dass es im mittel zu zwei Wahrscheinlichkeiten kommt.

1. $P(X \leq 28) = 0.91$
2. $P(X \leq 15) = 0.05$

Außerdem:

$X = \text{Re}\,\textit{ißfestigkeit}$

$X \sim N(\mu, \sigma)$

Mit diesen Formel und der Umkehrfunktion $\Phi_{0,1}^{-1}$ (Taschenrechner) lassen sich μ und σ wie folgt bestimmen.

1. Gleichung:

$P(X \leq 28) = 0.91$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{28-\mu}{\sigma}\right) = 0.91$$

$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.91) \approx 1.341 \Rightarrow \left(\frac{28-\mu}{\sigma}\right) = 1.341 \Leftrightarrow 1.341\sigma + \mu = 28$$

2. Gleichung:

$P(X \leq 15) = 0.05$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.05) \approx -1.645 \Rightarrow \left(\frac{15-\mu}{\sigma}\right) = -1.645 \Leftrightarrow -1.645\sigma + \mu = 15$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun die beiden Unbekannten μ und σ berechnen.

$I: 1.341\sigma + \mu = 28$

$II: -1.645\sigma + \mu = 15$

$III = I - II$

$\Rightarrow III: 2.986\sigma + 0 = 13 \Leftrightarrow \sigma = 13/2.986 \Leftrightarrow \sigma \approx 4.353$

σ in I einsetzen:

$\Rightarrow 1.341 * 4.353 + \mu = 28 \Leftrightarrow \mu \approx 22.163$

Die Verteilung der Reißfestigkeit sieht somit wie folgt aus: $X \sim N(22.163, 4.353^2)$

Aufgabe 2: Getränkefabrik

In einer Getränkefabrik werden 1-Liter-Flaschen eines Erfrischungsgetränks maschinell abgefüllt. Die Erfahrung zeigt, dass im Mittel 4% aller abgefüllten Flaschen weniger als 0.097L und 3% aller abgefüllten Flaschen mehr als 1.03L des betreffenden Getränks enthalten. Die zufällige in eine Flasche eingefüllte Getränkemenge(in Litern) wird als Wert einer Zufallsvariablen X angesehen. Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von X, wenn X eine $N(\mu,\sigma^2)$-verteilung besitzt und im Einklang mit den Erfahrungswerten $P(X<0.97)=0.04$ und $P(X>1.03)=0.03$ gilt.

Lösung:
Aus der Aufgabenstellung kann man folgende Informationen ablesen:
$X = Abfüllmenge$
$X \sim N(\mu,\sigma)$
$P(X<0.97)=0.04 \Leftrightarrow P(X\le 0.97)=0.04$ da es keine Wahrscheinlichkeit für $P(X=0.97)$ gibt da X stetig verteilt ist.
$P(X>1.03)=0.03 \Leftrightarrow P(X\le 1.03)=1-0.03=0.97$

1. Gleichung:
$P(X\le 0.97)=0.04$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{0.97-\mu}{\sigma}\right)=0.04$$

$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.04)\approx -1.750686071\approx -1.751 \Rightarrow \left(\frac{0.97-\mu}{\sigma}\right)=-1.751 \Leftrightarrow -1.751\sigma+\mu=0.97$$

2. Gleichung:
$P(X\le 1.03)=0.97$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}\left(\frac{1.03-\mu}{\sigma}\right)=0.97$$

$$\Phi_{0,1}^{-1}(0.97)\approx 1.88079361\approx 1.881 \Rightarrow \left(\frac{1.03-\mu}{\sigma}\right)=1.881 \Leftrightarrow 1.881\sigma+\mu=1.03$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun die beiden Unbekannten μ und σ berechnen.
$I: -1.751\sigma+\mu=0.97$
$II: 1.881\sigma+\mu=1.03$
$III = I - II$
$\Rightarrow III: -3.632\sigma+0=-0.06 \Leftrightarrow \sigma=-0.06/-3.632 \Leftrightarrow \sigma\approx 0.016$
σ in I einsetzen:
$\Rightarrow -1.751*0.016+\mu=0.97 \Leftrightarrow \mu\approx 0.998$

Die Verteilung der Reißfestigkeit sieht somit wie folgt aus:
$X \sim N(0.998, 0.016^2)$

Aufgabe 3: Erwartungswert- und Varianz

Gegen: Eine unabhängige und identisch verteilte Zahlenfolge $X_1 ... X_n$ mit gemeinsamem Erwartungswert $\mu = EX_1$ und gemeinsamer Streuung $\sigma^2 = D^2 X$.

a) Da die Folge unabhängig und identisch verteilt ist gilt folgendes Gesetz der großen Zahlen: $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$. Aus der Konsistenz und Erwartungstreue müsste gelten: $\forall_{\varepsilon>0} : \lim_{n\to\infty}\left(P(|X_n - \mu| > \varepsilon)\right) = 0 \wedge EX = \mu$. Da wir wissen das laut dem GdgZ gilt: $P\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = EX_1\right) = 1 \wedge \mu = EX_1 \Rightarrow EX = \mu \Rightarrow$ Erwartungstreue.

b) Da die Folge unabhängig und identisch verteilt ist und wir den Erwartungswert μ kennen gilt folgendes Gesetz der großen Zahlen: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$. Die Varianz σ^2 lässt sich auch als Erwartungswert folgender maßen darstellen: $\sigma^2 = E(X^2) - E(X) \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ mit (a) gilt weiter:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

$$\Leftrightarrow EX^2 - EX = \sigma^2$$