Mathe III.1 Übungsblatt Nr.12

Aufgabe 1: Cebysev-Ungleichung

Ein nicht idealer Würfel werde N mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem einzelnen Wurf eine Sechs zu werfen, werde mit p bezeichnet. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit q dafür, dass die Gesamtzahl S der in diesen N Würfen geworfenen Sechsen nicht kleiner als eine gegebene Zahl $k \in IN$ mit $Np < k \leq N$ ist.

a) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe q exakt errechnet werden kann.
b) Wie lässt sich mit Hilfe der Cebysev Ungleichung eine obere Schranke für q ermitteln?
c) Vergleichen Sie den unter (a) ermitteln exakten Wert mit der gemäß (b) gewonnenen Schranke im Fall $N = 10$, $p = 1/5$ und $k = 8$

Lösung:

a) $S \sim Bi(N, p)\ P(S \geq k)$

$$\Rightarrow q := \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

b) Cebysev-Ungleichung:

$$P(S \geq k) \Leftrightarrow P(S - ES \geq k - ES) \Leftrightarrow P(|S - ES| \geq k - ES)$$

$$\leq \frac{E(S-ES)^2}{(k-ES)^2} \Leftrightarrow \frac{D^2 S}{(k-ES)^2} \Leftrightarrow \frac{Np(1-p)}{(k-Np)^2}$$

c) $N = 10$, $p = 1/5$ und $k = 8$

$$\Rightarrow (a) = P(S \geq 8) = \sum_{n=8}^{10} \binom{10}{n} (\tfrac{1}{5})^n (\tfrac{4}{5})^{N-n} \approx 0.000077926$$

$$\Rightarrow (b) = P(S \geq 8) \leq \frac{10 * \frac{1}{5} * \frac{4}{5}}{\left(8 - 10 * \frac{1}{5}\right)^2} \approx 0.044$$

Aufgabe 2: Markov-Ungleichung II

Es sei X eine endliche Zufallsgröße mit endlicher Streuung und $y > 0$ eine gegebene Konstante. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten:

a) $P(X - EX \geq y) \leq \dfrac{E(|X - EX|}{y}$

Lösung:

Setze $Z := X - EX$ und Definiere $Y := Y(w) = \begin{cases} 0 & Z(w) < y \\ y & Z(w) \geq y \end{cases}$

$$P(X - EX \geq y) \leq \frac{E(|X - EX|}{y} \Leftrightarrow y * P(X - EX \geq y) \leq E|X - EX|$$

$$y * P(X - EX \geq y) = y * P(Z \geq y) = EY \leq EZ = E|X - EX|$$

Aufgabe 3: Spannung

Wird an den Eingang eines Verstärkers *V* die zufällige Spannung *X* gelegt, müsste am Ausgang theoretisch die Spannung *aX* erscheinen (*a* bezeichnet den Verstärkungsfaktor), praktisch erscheint jedoch die etwas verrauschte Spannung *Y*:

$$\to X \to Verst\ddot{a}rkr(X) \to Y$$

Für welchen Wert von *a* wird der mittlere Fehler zwischen *aX* und *Y* , d.h;

$$\Delta(a) := E(Y - aX)^2$$

Am kleinsten ? Wie groß ist der kleinstmögliche Wert von $\Delta(a)$?

Lösung:

$X, Y \in L_2$

$\Delta : IR \to IR, a \to E(Y - aX)^2 = E\left(Y^2 - 2aXY + a^2 X^2\right) \Leftrightarrow EY^2 - 2aEYX + EX^2$

$\Rightarrow \Delta(a) = EX^2 * \left(\left(a - \frac{EXY}{EX^2} \right)^2 + \frac{EY^2}{EX^2} - \frac{E(XY)^2}{E\left(X^2\right)^2} \right)$

1. Damit hat Δ sein Minimum bei $\frac{EXY}{EX^2} \wedge \Delta\left(\frac{EXY}{EX^2}\right) = EY^2 - \frac{EXY}{EX^2}$
2. $EX^2 = 0$
   a. $EXY = 0 : \Delta$ nimmt für jedes $a \in IR$ das Minimum EY^2 an.
   b. $EXY \neq 0 :$ Dann hat Δ kein Minimum.