# Mathe III.1 Übungsblatt Nr.11

## Aufgabe 1: Diskreter Zufallsvektor

Sei $(X,Y)$ ein diskreter Zufallsvektor mit der Verteilung gemäß folgender Tabelle;

| $i \diagup j$ | **-1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|
| **-1** | $\frac{\alpha}{4}$ | $\frac{1-\alpha}{4}$ | $\frac{\alpha}{4}$ |
| **0** | $\frac{1-\alpha}{4}$ | $0$ | $\frac{1-\alpha}{4}$ |
| **1** | $\frac{\alpha}{4}$ | $\frac{1-\alpha}{4}$ | $\frac{\alpha}{4}$ |

mit $\alpha \in (0,1)$.

a) Ermitteln Sie die Marginalverteilungen von $(X,Y)$.
b) Berechnen Sie *EX*, *EY*, *EXY*.
c) Sind *X* und *Y* unkorreliert?
d) Sind *X* und *Y* unabhängig?

**Lösung:**

a) $P(X=-1) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1)$

$\Rightarrow P(X=-1) = \frac{a}{4} + \frac{1-a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1+a}{4}$

$\Rightarrow P(X=0) = \frac{1-a}{4} + 0 + \frac{1-a}{4} = \frac{1-a}{2}$

$\Rightarrow P(X=1) = \frac{a}{4} + \frac{1-a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1+a}{4}$

$P(Y=-1) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=0, Y=-1) + P(X=1, Y=-1)$

$\Rightarrow P(Y=-1) = \frac{a}{4} + \frac{1-a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1+a}{4}$

$\Rightarrow P(Y=0) = \frac{1-a}{4} + 0 + \frac{1-a}{4} = \frac{1-a}{2}$

$\Rightarrow P(Y=1) = \frac{a}{4} + \frac{1-a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1+a}{4}$

b) $EX = \sum_{k=-1}^{1} k * P(X=k) = -1 * \frac{1+a}{4} + 1 * \frac{1+a}{4} = 0$

$EY = \sum_{k=-1}^{1} k * P(Y=k) = -1 * \frac{1+a}{4} + 1 * \frac{1+a}{4} = 0$

$EXY = \sum_{k=-1}^{1} k * P(X=k) * P(Y=k) = -1 * (\frac{1+a}{4})^2 + 1 * (\frac{1+a}{4})^2 = 0$

c) $\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EX * EY = 0$

d) Aus der Tabelle ersichtlich:

$P(X=0 \cap Y=0) = 0 \neq \left(\frac{1-a}{2}\right) = P(X=0) * P(Y=0)$

$\Rightarrow$ Die Zufallsgrößen *X* und *Y* sind NICHT unabhängig !

## Aufgabe 2: Korrelationskoeffizient

Beim sechsmaligen Werfen eines idealen Würfels bezeichne *U* die Anzahl der aufgetretenen Einsen und *S* die Anzahl der aufgetretenen Sechsen.
Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(U,S)$ von *U* und *S*.

**Lösung:**

$$U \sim Bi(6,\tfrac{1}{6}) \Rightarrow EU = 1 \wedge D^2U = \tfrac{5}{6}$$

$$S \sim Bi(6,\tfrac{1}{6}) \Rightarrow ES = 1 \wedge D^2S = \tfrac{5}{6}$$

$$ESU = \sum_{k=0}^{6}\sum_{n=0}^{6-k} n*k*P(S=k,U=n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{6}\sum_{n=0}^{6-k} n*k*\begin{pmatrix} 6! \\ k!n! \end{pmatrix}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{4}{6}\right)^{6-k-n}$$

$$\Leftrightarrow ESU = \tfrac{1}{6}^{2} *5*6*\sum_{k=0}^{6}\sum_{n=0}^{6-k}\begin{pmatrix} 4! \\ (k-1)!(n-1)! \end{pmatrix}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{4-(k-1)-(n-1)} = \tfrac{5}{6}$$

$$\operatorname{cov}(S,U) = ESU - ES*EU = \tfrac{5}{6} - 1 = -\tfrac{1}{6}$$

$$\rho(S,U) = \frac{\operatorname{cov}(S,U)}{\sqrt{D^2S}*\sqrt{D^2U}} \Rightarrow \frac{-\tfrac{1}{6}}{\left(\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right)^2} = -\tfrac{1}{5}$$

## Aufgabe 3: Summenverteilung von Poissonvariablen

Zeigen Sie, dass die Summe $Z := X + Y$ zweier stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen *X* und *Y*, die jeweils einer Poissonverteilung mit den Parametern $\lambda_X$ und $\lambda_Y$ unterliegen, ebenfalls poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda_Z := \lambda_X + \lambda_Y$ ist.

**Lösung:**

$$P(Z=z) \Leftrightarrow P(X+Y=z) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{z} P(X=k \wedge Y=z-k) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{z} P(X=k)*P(Y=z-k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{z}\frac{\lambda_X{}^{k}}{k!}e^{-\lambda_X} * \frac{\lambda_Y{}^{z-k}}{(z-k)!}e^{-\lambda_Y} \Leftrightarrow e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}\sum_{k=0}^{z}\frac{z!}{z!}*\frac{\lambda_X{}^{k}}{k!}*\frac{\lambda_Y{}^{z-k}}{(z-k)!} \Leftrightarrow e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}*\frac{1}{z!}\sum_{k=0}^{z}\frac{\lambda_X{}^{k}*\lambda_Y{}^{z-k}}{k!}*\frac{z!}{k!(z-k)!}$$

$$\Rightarrow e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}*\frac{1}{z!}\sum_{k=0}^{z}\lambda_X{}^{k}*\lambda_Y{}^{z-k}*\binom{k}{z} \Leftrightarrow e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}*\frac{1}{z!}*\left(\lambda_X+\lambda_Y\right)^{z} \Leftrightarrow \frac{\left(\lambda_X+\lambda_Y\right)^{z}}{z!}e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}$$

$$\Rightarrow \lambda_Z := \lambda_X + \lambda_Y$$

## Aufgabe 4: Dämmplatten

Dämmplatten gelten als maßgerecht, wenn ihre Dicke zwischen 9.97 und 10.05*mm* liegt. Eine Hobelmaschine ist auf Solldicke 10*mm* eingestellt. Stichproben ergeben, dass die Maschine die Solldicke mit einer Standardabweichung von 0,1*mm* einhält.

a) Wie viel Prozent der Platten aus dieser Maschine sind nicht maßgerecht?
b) Lässt sich dieser Prozentsatz senken, wenn man die Solldicke auf 10,1*mm* einstellt und die Standardabweichung die selbe bleibt?

**Lösung:**

$D \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) $\mu = 10mm \wedge \sigma = 0.1mm$

$$\Rightarrow 1 - P(9.97 \leq D \leq 10.05) = 1 - \left( \Phi_{0,1}\left(\frac{10.05 - 10}{0.1}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{9.97 - 10}{0.1}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi_{0,1}(0.5) - \Phi_{0,1}(-0.3)\right) \Leftrightarrow 1 - \Phi_{0,1}(0.5) + 1 - \Phi_{0,1}(0.3) \approx 0.69$$

b) $\mu = 10.1mm \wedge \sigma = 0.1mm$

$$\Rightarrow 1 - P(9.97 \leq D \leq 10.05) = 1 - \left( \Phi_{0,1}\left(\frac{10.05 - 10.1}{0.1}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{9.97 - 10.1}{0.1}\right)\right) \approx 0.7883$$