Mathe III.1 Übungsblatt Nr.10

Aufgabe 1: Streuungen II.

Bestimmen Sie die Streuung $D^2 X$ einer Zufallsgröße X unter folgenden Verteilungsannahmen:

a) $X \sim UC[a,b]$; $\quad (a < b \in IR)$
b) $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad (\lambda > 0)$
c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad (\mu \in IR, \sigma^2 > 0)$
d) $P(X = k) = \frac{1}{N}$, für $k = 1,...,N$ $\quad (N \in IN)$

Aufgabe 2: Momente I

Berechnen sie falls existent, die Erwartungswerte

a) Ee^{tX}, für $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0, t \in IR$
b) $E\frac{1}{X}$, für $X \sim UC[a,b], 0 < a < b$

Aufgabe 3: Kugellager

Die Qualität der Kugeln für ein Kugellager wird auf folgende Weise kontrolliert:
Fällt die Kugel durch eine Öffnung mit dem Durchmesser d_2, jedoch nicht durch die Öffnung mit dem Durchmesser $d_1 (d_1 < d_2)$, so genügt die Kugel den Qualitätsanforderungen. Wird eine der beiden Bedingungen nicht eingehalten, so ist die Kugel Ausschuss. Es ist bekannt, dass der Durchmesser *D* der Kugeln unter gegebenen Fertigungsbedingungen eine normalverteilte zufällige Größe mit den Parametern

$$\mu_d = \frac{d_1 + d_2}{2} \text{ und } \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{4} \text{ ist.}$$

Man bestimme die Ausschussquote *p*, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Kugel sich als Ausschuss erweist.

Lösung:

$$D \sim N\left(\frac{d_1 + d_2}{2}, \frac{d_2 - d_1}{4}\right)$$

$$q := P(d_1 < D \le d_2) \Rightarrow p := 1 - q$$

$$\Rightarrow q := \Phi_{0,1}\left(\frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{4}}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{4}}\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{4}}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{\frac{d_1 - d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{4}}\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{2(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{2(d_1 - d_2)}{d_2 - d_1}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_{0,1}(2) - \Phi_{0,1}(-2) \Leftrightarrow \Phi_{0,1}(2) - (1 - \Phi_{0,1}(2)) \Leftrightarrow 2\Phi_{0,1}(2) - 1 \Rightarrow p := 1 - (2\Phi_{0,1}(2) - 1) \Leftrightarrow 2 - 2\Phi_{0,1}(2)$$

$$\Rightarrow p \approx 2 - 2 * 0.9772 = 0.0456$$

Aufgabe 4: Erwartungswert und Streuung beim Lotto

Die größte der bei einer Ziehung im Lotto8 ("6 aus 49") gezogene Zahlen werde mit M bezeichnet. Besitzt diese Zufallsgröße Erwartungswert und Streuung (Begründung)? Falls ja: Welche Werte haben diese?

<u>HINWEIS:</u> Es gilt: $\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Lösung:

$$P(M = k) = \frac{\binom{1}{1}\binom{k-1}{5}}{\binom{49}{6}}$$

$$EX = \sum_{k=6}^{49} k * \frac{\binom{1}{1}\binom{k-1}{5}}{\binom{49}{6}} \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} k * \binom{k-1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} k * \frac{(k-1)!}{5!(k-1-5)!} \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} \frac{6}{6} * \frac{k!}{5!(k-6)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} 6 * \frac{k!}{6!(k-6)!} \Leftrightarrow 6 * \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} \binom{k}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \binom{50}{7} \Leftrightarrow \frac{6 * \binom{50}{7}}{\binom{49}{6}} = \frac{300}{7}$$

$$EX^2 = \sum_{k=6}^{49} k^2 * \frac{\binom{k-1}{5}}{\binom{49}{6}} \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} k^2 * \frac{(k-1)!}{5!(k-1-5)!} \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} 6 * k * \frac{k!}{6!(k-6)!} \Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \sum_{k=6}^{49} k * \binom{k}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(\sum_{k=6}^{49} k * \binom{k}{6} + \sum_{k=6}^{49} \binom{k}{6} - \sum_{k=6}^{49} \binom{k}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(\sum_{k=6}^{49} k * \binom{k}{6} + \binom{k}{6} - \sum_{k=6}^{49} \binom{k}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(\sum_{k=6}^{49} (k+1) * \binom{k}{6} - \sum_{k=6}^{49} \binom{k}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(\sum_{k=6}^{49} (k+1) * \frac{k!}{6!(k+1-7)!} - \binom{50}{7} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(7 * \sum_{k=6}^{49} \frac{(k+1)!}{7!(k+1-7)!} - \binom{50}{7} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{\binom{49}{6}} \left(7 * \sum_{k=6}^{49} \binom{k+1}{7} - \binom{50}{7} \right) \Leftrightarrow \frac{42\binom{51}{8} - 6\binom{50}{7}}{\binom{49}{6}} = \frac{26175}{14}$$

$$D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{26175}{14} - \left(\frac{300}{7}\right)^2 \approx 39.92$$