Mathe III.1 Übungsblatt Nr.9

Aufgabe 1: Erwartungswerte II

Bestimmen Sie den Erwartungswert *EX* einer Zufallsgröße - soweit existent – unter folgenden Verteilungsannahmen:

a) $X \sim B(N, p)$; $\quad (N \in IN, p \in [0,1])$
b) $X \sim HyG(U, R, S)$; $\quad (U, R, S \in IN, S \le R \wedge (U - R))$
c) $X \sim Geo(a)$ $\quad (a \in [0,1))$
d) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad (\mu \in IR, \sigma^2 > 0)$
e) $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad (\lambda > 0)$
f) $X \sim Cauchy(\mu, \lambda)$ $\quad (\mu \in IR, \lambda > 0)$

(Existenz bzw. Nichtexistenz von *EX* bitte nachweisen!)

Aufgabe 2: Elementare Streuung

Es sei *X* eine $UC[0,1]$–verteilte Zufallsgröße.

a) Berechnen sie *EX*.
b) Bestimmen sie die Verteilungsfunktion F_Y und die Dichte f_Y der Zufallsgröße $Y := (X - EX)^2$.
c) Berechnen sie *EY*.

Lösung:

a) Erwartungswert:

$$EX = \int_a^b x * \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} * \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} * \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a} * \left(\tfrac{1}{2} b^2 - \tfrac{1}{2} a^2\right) = \frac{1}{2} * \frac{b^2 - a^2}{b-a}$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$; für UC[0,1] $\Rightarrow EX = \tfrac{1}{2}$

b)

c) $EY = D^2 X \Rightarrow$

$$EY = EX^2 - (EX)^2 = \int_a^b x^2 * \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} * \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a} * \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} * \left[\tfrac{1}{3} b^3 - \tfrac{1}{3} a^3\right] - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

Für UC[0,1] $\Rightarrow EY = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

Aufgabe 3: Diskrete Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße X besitze folgende Verteilung:

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{5}$
10	$\frac{3}{10}$

a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X und die Dichte f_X.
b) Berechnen Sie *EX*.
c) Berechnen Sie $D^2 X := E(X - EX)^2$.

Lösung:
a) *Auf die Skizze verzichte ich wieder an dieser Stelle.*
b) $EX = 2 * \frac{1}{2} + 8 * \frac{1}{5} + 10 * \frac{3}{10} = 1 + 3 + 1\frac{3}{5} = 5.6$
c) $D^2 X = (2 - 5.6)^2 * \frac{1}{2} + (8 - 5.6)^2 * \frac{1}{5} + (10 - 5.6)^2 * \frac{3}{10} = 6.48 + 1.152 + 5.808 = 13.44$

Aufgabe 4: Leuchte

In einer Leuchte befinden sich zwei parallel geschaltete Glühlampen. Die (zufälligen) Lebensdauern T_1 und T_2 dieser Lampen können als unabhängig und exponentialverteilt angesehen werden; die mittlere Lebensdauer betrage jeweils 500 Betriebsstunden.
Der Käufer der Leuchte bestückt diese zwei Glühlampen und entschließt sich, die Glühlampen erst dann auszuwechseln, wenn beide ausgefallen sind.

a) Nach wie viel Betriebsstunden ist dies im Mittel der Fall?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Glühlampenwechsel bereits vor Ablauf von 400 Betriebsstunden notwendig?

Lösung:
T = Zeit bis zum Glühlampenwechsel.
$T = \max\{T_1, T_2\}$
$T_1, T_2 \sim Exp(\lambda); \lambda = \frac{1}{500}$; T_1 und T_1 sind unabhängig.

a) $F_T(t) = P(T \le t) = P(\max\{T_1, T_2\} \le t) \Rightarrow P(T \le t) = P(T_1 \le t \cap T_2 \le t) = P(T_1 \le t) * P(T_2 \le t)$
$\Rightarrow F_T(t) = F_{T_1}(t) * F_{T_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 \, 1_{[0,\infty)}$
$\Rightarrow f_T(t) = \left((1 - e^{-\lambda t})^2\right)' = 2(1 - e^{-\lambda t}) * \lambda e^{-\lambda t} \, 1_{(0,\infty)}$
$$ET = \int_{-\infty}^{\infty} x * 2(1 - e^{-\lambda x}) * \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{3}{2\lambda}$$
b) $P(T \le 400) = F_T(400) = 1 - e^{-\frac{4}{5}} \approx 0.30324$