Mathe III.1 Übungsblatt Nr.8

Aufgabe 1: Fußball

Eine Fußballmannschaft verliert erfahrungsgemäß 30% aller Spiele, 20% gehen unentschieden aus. In der kommenden Saison sind – unabhängig voneinander – insgesamt 24 Spiele zu bestreiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Mannschaft diesmal nur 6 Spiele verlieren und 13 oder 14 Spiele gewinnen?

Lösung:
G = Anzahl der verlorenen Spiele
U = Anzahl der Spiele die unentschieden ausgegangen sind.
V = Anzahl der verlorenen Spiele

Es handelt sich um die Multinomialverteilung:
$P(X_1 = E_1, X_2 = E_2, ..., X_n = E_n)$
$\Rightarrow \binom{E_1 + ... + E_n}{E_1, ..., E_2} p_1^{E_1} p_2^{E_2} ... p_n^{E_n}$ mit; $\binom{E_1 + ... + E_n}{E_1, ..., E_2} = \frac{(E_1 + ... + E_n)!}{E_1! * ... * E_2!}$

Gesucht: $P(V = 6, G = 13, U = 5) + P(V = 6, G = 14, U = 4)$
Mit; $p_v = 0.3; p_g = 0.5; p_u = 0.2$
$\Rightarrow \binom{24}{6,13,5} p_v^{\,6} p_g^{\,13} p_u^{\,5} + \binom{24}{6,14,4} p_v^{\,6} p_g^{\,14} p_u^{\,4} \approx 0.06216$

Aufgabe 2: Anwendung Verteilungsfunktionen

Es sei X eine Zufallsgröße.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von…

a) $P(10 \leq X < 13)$
b) $P(X = 12)$

Für den Fall, dass X

i) Die Anzahl der Würfe zwischen der ersten und der zweiten Sechs in einer beliebig langen Würfelserie angibt,
ii) Einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ genügt, dass heißt die Dichte

$$\psi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & x \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

besitzt
iii) Stetig verteilt ist mit der Dichte:

$$\varphi(t) = \begin{cases} ct^2 & t \in (0,20) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Wobei c eine passend zu wählende Konstante ist.

Lösung:

i) Die Anzahl der Würfe zwischen der ersten und der zweiten Sechs lassen sich ebenso gut berechnen wie die Anzahl der Würfe bis eine Sechs fällt:

$$\Rightarrow P(10 \le X < 13) = \sum_{10}^{12} Geo(\tfrac{1}{2})_k = \sum_{k=10}^{13} (\tfrac{1}{2}) * (1-\tfrac{1}{2})^{k-1} \approx 0.068$$

$$\Rightarrow P(X = 12) = Geo(\tfrac{1}{2})_{12} = (\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})^{11}$$

ii) $P(10 \le X < 13)$

$$\Rightarrow \int_{10}^{13} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[1-e^{-\lambda x}\right]_{10}^{12} = 1-e^{-12\lambda} - (1-e^{-10\lambda}) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{10\lambda}} - \frac{1}{e^{12\lambda}} - (P(X = 13) = 0)$$

$P(X = 12)$

$$\Rightarrow \int_{12}^{12} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[1-e^{-\lambda x}\right]_{12}^{12} = 1-e^{-12\lambda} - (1-e^{-12\lambda}) \Leftrightarrow 0$$

Bei einer stetigen Verteilung gibt es keine Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten wert.

iii) Die Funktion ist stetig und monoton nicht fallend (F1)&(F2), damit sie gegen 1 läuft (F3) muss die konstante *c* entsprechend gewählt werden.

$$\Rightarrow \int_0^{20} ct^2 dt = 1 \Leftrightarrow c\int_0^{20} t^2 dt = 1 \Leftrightarrow c\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^{20} = 1 \Leftrightarrow c\left(\tfrac{20^3}{3} - \tfrac{0}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow c = \tfrac{3}{20^3}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \begin{cases} \tfrac{3}{20^3} t^2 & t \in (0,20) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$P(10 \le X < 13)$

$$\Rightarrow \int_{10}^{13} \tfrac{3}{20^3} t^2 dt - (P(X = 13) = 0) \Leftrightarrow \tfrac{3}{20^3}\int_{10}^{13} t^2 dt \Leftrightarrow \tfrac{3}{20^3}\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_{10}^{13} = 1 \Leftrightarrow \tfrac{3}{20^3}\left(\tfrac{13^3}{3} - \tfrac{10^3}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{13^3}{20^3} - \frac{10^3}{20^3} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{20}\right)^3 - \left(\frac{10}{20}\right)^3$$

$P(X = 12)$

Bei einer stetigen Verteilung gibt es keine Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert.

Aufgabe 3: Glühlampen

Ein Hersteller von Glühlampen gibt für seine Produkte eine mittlere Lebensdauer von 500 Betriebsstunden an. Ermitteln Sie unter der Annahme, die Lebensdauer der Glühlampen sei exponentialverteilt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die von Ihnen soeben erworbene Glühlampe…

a) …innerhalb von 2 Betriebsstunden ausfällt;
b) …exakt nach π Betriebsstunden ausfällt;
c) …innerhalb von 500 Betriebsstunden ausfällt;
d) …eine Lebensdauer zwischen 800 und 850 Betriebsstunden bzw.
e) …eine Lebensdauer von mindestens 1000 Betriebsstunden besitzt.

Lösung:
X = Betriebsstunden bis zum Ausfall der Glühlampe
$X \sim Exp(\tfrac{1}{500})$

a) $P(X \leq 2)$

$$\Rightarrow \int_0^2 \tfrac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}x} dx \Leftrightarrow \left[1-e^{-\frac{1}{500}x}\right]_0^2 \Leftrightarrow 1-e^{-2\frac{1}{500}}-(1-e^{-0\frac{1}{500}}) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{2\frac{1}{500}}}$$

b) $P(X = \pi)$

Es gibt bei einer stetigen Verteilung keine Wahrscheinlichkeit an einer bestimmten Stelle.

c) $P(X \leq 500)$

$$\Rightarrow \int_0^{500} \tfrac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}x} dx \Leftrightarrow \left[1-e^{-\frac{1}{500}x}\right]_0^{500} \Leftrightarrow 1-e^{-500\frac{1}{500}}-(1-e^{-0\frac{1}{500}}) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e}$$

d) $P(800 \leq X \leq 850)$

$$\Rightarrow \int_{800}^{850} \tfrac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}x} dx \Leftrightarrow \left[1-e^{-\frac{1}{500}x}\right]_{800}^{850} \Leftrightarrow 1-e^{-850\frac{1}{500}}-(1-e^{-800\frac{1}{500}}) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{800}{500}}}-\frac{1}{e^{\frac{850}{500}}}$$

e) $P(X > 1000) \Leftrightarrow 1-P(X \leq 1000)$

$$\Rightarrow 1-\int_0^{1000} \tfrac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}x} dx \Leftrightarrow 1-\left[1-e^{-\frac{1}{500}x}\right]_0^{1000} \Leftrightarrow 1-(1-e^{-1000\frac{1}{500}}) \Leftrightarrow \frac{1}{e^2}$$

Aufgabe 4: UC-Verteilung

Es seien *a* und *b* (mit *a*<*b*) beliebige reelle Zahlen. Man sagt, eine Zufallsgröße sei auf dem Intervall *[a, b]* gleichmäßig stetig verteilt, wenn *X* die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Besitzt.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von *X* und skizzieren Sie diese!
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt im Fall $a = 0$, $b = 1$
   a. $X \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$?
   b. $X > \frac{3}{4}$?
c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_Y und die Dichte f_Y der Zufallsgröße $Y := X^2$ im Fall $a = 0$ und $b = 1$. Gehen Sie dabei von dem Ansatz aus:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y), y \in IR$$

Lösung:

a) $F_X(x) = \int f_X \, dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a}\right] \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Auf die Skizze verzichte ich an dieser Stelle

b) Für $a = 0$ und $b = 1$ folgt die Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & sonst \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

   a. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$

$$\Rightarrow \int_{0.5}^{0.75} 1 dx \Leftrightarrow [x]_{0.5}^{0.75} = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

   b. $P(X > \frac{3}{4}) \Leftrightarrow 1 - P(X \leq \frac{3}{4})$

$$\Rightarrow 1 - \int_{0}^{0.75} 1 dx \Leftrightarrow 1 - [x]_{0}^{0.75} = 1 - 0.75 = 0.25$$

c) $Y := X^2 \Rightarrow F_Y(x) = \begin{Bmatrix} 0 & y < 0 \\ \sqrt{x} & y \in [0,1] \\ 1 & y > 1 \end{Bmatrix} \wedge f_Y(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & y \in [0,1] \\ 0 & sonst \end{Bmatrix}$