Mathe III.1 Übungsblatt Nr.7

Aufgabe 1: Überprüfen der Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

a) Sind folgende Funktionen Verteilungsfunktionen?

$$F_1(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \sin(x) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2}\le x \end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2\sin(x) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2}\le x \end{cases}$$

$$F_3(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \sin(2x) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2}\le x \end{cases}$$

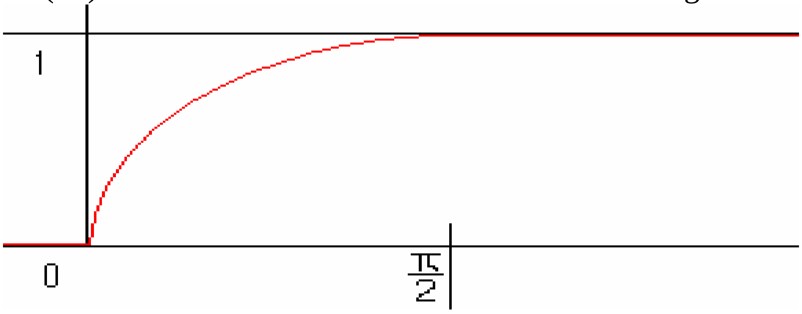
$$F_4(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}\sin(x) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2}\le x \end{cases}$$

Lösung:

a) Verteilungsfunktionen erfordern folgende Eigenschaften:

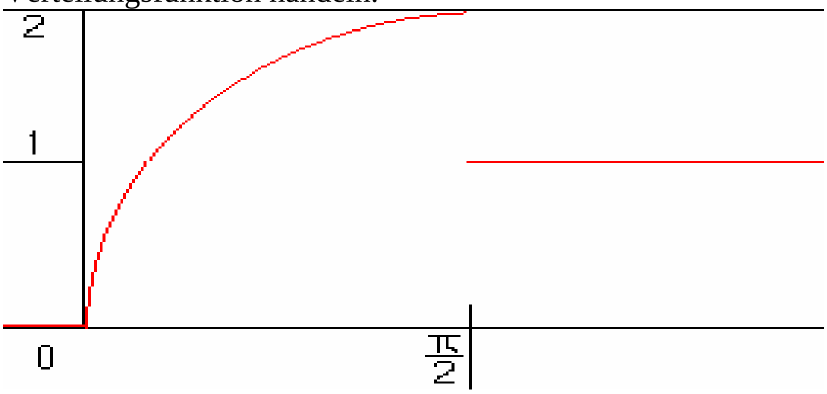
(F1) F ist monoton nicht fallend.
(F2) F ist rechtsseitig stetig
(F3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(F(x))=0 \wedge \lim\limits_{x\to\infty}(F(x))=1$

i) $F_1(x)$ ist für $0\le x<\frac{\pi}{2}$ monoton steigend, und damit natürlich auch monoton nicht fallend. $\Rightarrow$ (F1) .
Da sin(x) eine stetige Funktion ist und der Definitionsbereich keine Lücken enthält. $\Rightarrow$ (F2) .
Laut Definitionsbereich gilt:
$F_1(x)=0$ für $x<0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(F_1(x))=0$
$F_1(x)=1$ für $\frac{\pi}{2}\le x \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(F_1(x))=1$
$\Rightarrow$(F3) $\Rightarrow$ Es handelt sich hierbei um eine Verteilungsfunktion.



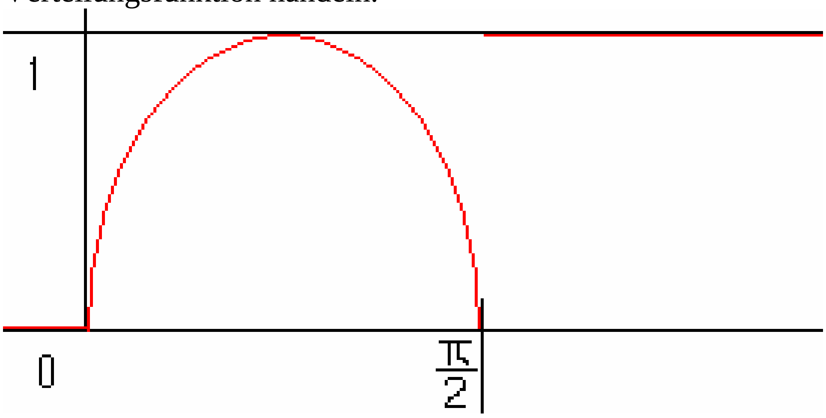
ii) $\sin(\frac{3}{2}) > 1 \Rightarrow \sin(x)$, fällt an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ runter auf 1.

$\Rightarrow$(F1) ist nicht erfüllt, damit kann es sich nicht mehr um eine Verteilungsfunktion handeln.



iii) Die 3. Funktion ist bis $\sin(2 * \frac{\pi}{4})$ also $x = \frac{\pi}{4}$ monoton steigend, von $x = \frac{\pi}{4}$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ jedoch wieder fallend.

$\Rightarrow$(F1) ist nicht erfüllt, damit kann es sich nicht mehr um eine Verteilungsfunktion handeln.



iv) $F_4(x)$ ist für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ monoton steigend, und damit natürlich auch monoton nicht fallend. $\Rightarrow$ (F1) .

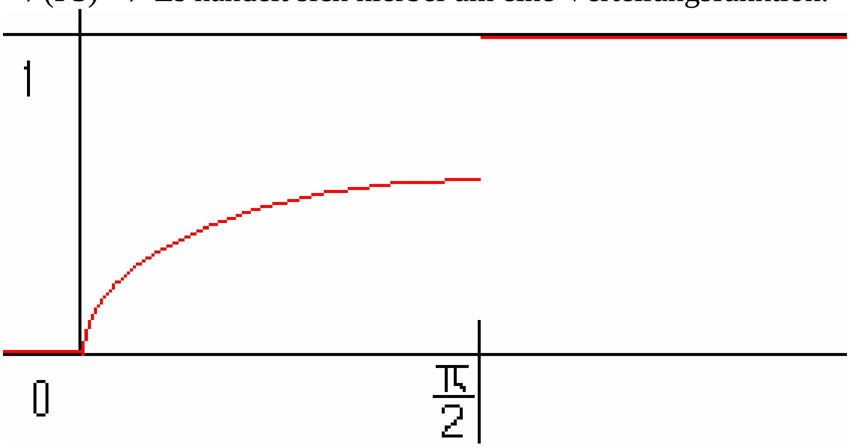
Da sin(x) eine stetige Funktion ist und der Definitionsbereich keine Lücken enthält. $\Rightarrow$ (F2) .

Laut Definitionsbereich gilt:

$F_1(x) = 0$ für $x < 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-\infty}\left(F_1(x)\right) = 0$

$F_1(x) = 1$ für $\frac{\pi}{2} \leq x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}\left(F_1(x)\right) = 1$

$\Rightarrow$(F3) $\Rightarrow$ Es handelt sich hierbei um eine Verteilungsfunktion.



Aufgabe 2: Bedingungen an Konstanten

Welche Bedingungen müssen Konstanten *a, b, c* genügen, damit die nachfolgende Funktion *F*…

a) …eine stetige Verteilungsfunktion ist?
b) …eine Verteilungsfunktion ist?

i) $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < e \\ a & x = e \\ bx + c & e < x \leq \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases}$$

ii) $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \max\{0, \min\{1, x^2 + bx + c\}\} & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>HINWEIS:</u> Überprüfen Sie (F1) bis (F3).

Hierfür noch keine Lösungen vorhanden. Wird evtl. nachgebessert

Aufgabe 3: Nichtalterungseigenschaft

Es sei *T* die zufällige Lebensdauer eines Aggregates. Man nimmt an, *T* sei Exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.:

$$P(T \leq t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) 1_{[0,\infty)}(t), (t \in IR)$$

Man zeige, dass folgende „Nichtalterungseigenschaft" gilt:

$$P(T \leq t + s \mid T \geq s) = P(T \leq t), (s, t \geq 0)$$

Lösung:

$$P(T \leq t + s \mid T \geq s) = \frac{P(T \leq t + s \cap T \geq s)}{P(T \geq s)} = \frac{P(s \leq T \leq t + s)}{1 - P(T \leq s)} \Leftrightarrow \frac{\int_s^{t+s} f(x)dx}{1 - \int_0^s f(x)dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+s)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda s}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda s}\right)} \Leftrightarrow \frac{-e^{-\lambda(t+s)} + e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} \Leftrightarrow \frac{-(e^{-\lambda t} * e^{-\lambda s}) + e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda s} - (e^{-\lambda t} * e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda s}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda s}} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \int_0^t f(x)dx \Leftrightarrow P(T \leq t)$$

Aufgabe 4: Geburtstagsaufgabe

Ein Student löst die „Geburtstagsaufgabe“ so:
Es existieren $\binom{365+s-1}{s}$ Möglichkeiten, die Geburtstage der s Schüler auf das ganze Jahr zu verteilen; weiterhin existieren $\binom{365}{s}$ Möglichkeiten, sie so zu verteilen, dass keine 2 Geburtstage auf denselben Tag fallen. Somit ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass keine 2 Schüler an demselben Tag Geburtstag haben.

$$p_s = \binom{365}{s}\binom{365+s-1}{s}^{-1}$$

Man überlege sich, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen diese Lösung falsch(richtig) ist und diskutiere die entsprechenden Vorraussetzungen.

<u>HINWEIS:</u> Es genügt den Fall einer Klasse mit 2 Schülern zu betrachten. Geben sie unter der Verwendung ein- und derselben Menge von Elementarereignissen konkrete Wahrscheinlichkeitsräume für beide Lösungen an.

Lösung:

- Klasse mit s Schülern
- Jahr mit 365 Tagen
- P := Wahrscheinlichkeit, dass keine 2 Schüler am selben Tage Geburtstag haben.

„Vorlesungslösung“: $p := \frac{365^{\underline{s}}}{365^s} \Leftrightarrow \frac{Modell(II)}{Modell(I)}$ Schüler unterscheidbar

„Studentenlösung“: $p := \frac{\binom{365}{s}}{\binom{s+365-1}{s}} \Leftrightarrow \frac{Modell(III)}{Modell(IV)}$ Schüler nicht unterscheidbar

- Beispiel für 3 Tage:

„Vorlesungslösung“: $\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \#\Omega = 9 \wedge P\{(i,j)\} = P\{(i,j) \wedge (j,i)\} = \frac{2}{9}$

„Studentenlösung“: $\Omega = \left\{\begin{matrix} [1,1] & [1,2] & [1,3] \\ - & [2,2] & [2,3] \\ - & - & [3,3] \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \#\Omega = 6 \wedge P\{[i,j]\} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ Durch das nicht unterscheiden der Schüler wird eine Vergröberung der Wahrscheinlichkeiten hervorgerufen. Da sich Schüler immer unterscheiden lassen und nicht mit farb- und namenlosen Chips vergleichen lassen, die man in Boxen füllt, ist die „Vorlesungslösung“ sinnvoller gewählt.