

**Aufgabe 1: 5000 Schrauben**

Eine Kiste enthalte 5000 Schrauben, von denen 10 ein defektes Gewinde besitzen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 500 zufällig (ohne Zurücklegen) herausgegriffenen Schrauben genau eine Schraube ein defektes Gewinde besitzt, berechne man unter geeigneten Annahmen.

- exakt,
- durch Anwendung der Binomialapproximation der Hypergeometrischen Verteilung,
- durch näherungsweise Berechnung der Binomialwahrscheinlichkeiten in (b) mit Hilfe des Poisson Grenzwertsatzes.

Vergleichen Sie die in (a)-(c) gefundenen Ergebnisse mit Hilfe von Dezimaldarstellungen.

**Lösung:**

- exakt;

$$X \sim \text{HyG}(U, R, S) \quad P(X = k) = \frac{\binom{R}{k} \binom{U-R}{S-k}}{\binom{U}{S}}$$

Hier für  $U = 5000$ ,  $R = 10$  und  $S = 500$

$$\Rightarrow P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{4990}{499}}{\binom{5000}{500}} \approx 0.3878$$

- Binomialapproximation der Hypergeometrischen Verteilung;

$$X \sim \text{Bi}(N, p) \quad P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Hier für  $N = 500$ ,  $p = 10/5000$  und  $k = 1$

$$\Rightarrow P(X = 1) = \binom{500}{1} \left(\frac{1}{500}\right)^1 \left(\frac{499}{500}\right)^{499} \approx 0.3682$$

- Approximation durch die Poissonverteilung;

$$X \sim \text{Pois}(\lambda), \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{mit } EX = \lambda$$

Hier für  $\lambda = EX = Np = 500 * 10 / 5000 = 1$

$$\Rightarrow P(X = 1) = \frac{1^1}{1!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679$$

## Aufgabe 2: 60 Würfe

Ein idealer Würfel werde 60 Mal geworfen. Es bezeichne  $X$  die Anzahl der dabei aufgetretenen Sechsen. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.

- a)  $P(X = 11)$
- b)  $P(8 \leq X \leq 10)$
- c)  $P(X > 20)$

HINWEIS: Angabe einer Formel genügt.

**Lösung:**

$$X \sim Bi(60, \frac{1}{6}), P(X = k) = \binom{60}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{60-k}$$

$$\text{a) } P(X = 11) = \binom{60}{11} \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \left(\frac{5}{6}\right)^{49}$$

$$\text{b) } P(8 \leq X \leq 10) = \sum_{k=8}^{10} \binom{60}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{60-k}$$

$$\text{c) } P(X > 20) = \sum_{k=21}^{60} \binom{60}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{60-k}$$

## Aufgabe 3: Algorithmus für HyG II

Es stehe eine Prozedur „rand“ zur Verfügung, die das zufällige Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit nummerierten Kugeln nachbildet, wobei  $n \in \mathbb{N}$  ein frei wählbarer Parameter ist. (D.h. , im Ergebnis des Aufrufes „rand(n)“ wird auf zufällige Weise aus  $1, \dots, n$  gewählte Zahl  $X$  zurückgegeben, wobei jeder der Zahlen  $1, \dots, n$  mit der selben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. )

Es seien nun  $U, R, S$  gegebene natürliche Zahlen mit  $R \leq U$  und  $S \leq R \wedge (U - R)$ . Geben Sie eine Prozedur an „HyG“ mit den Parametern  $U, R, S$  derart an, dass im Ergebnis des Aufrufes „HyG(U, R, S)“ eine zufällige aus  $0, \dots, S$  gewählte Zahl  $Y$  zurückgegeben wird, wobei die Wahrscheinlichkeit  $P(Y = k)$  dafür, dass die Zahl  $k$  gewählt wird gerade

$$\frac{\binom{R}{k} \binom{U-R}{S-k}}{\binom{U}{S}}, \text{ beträgt.}$$

HINWEIS: Es genügt eine metasprachliche Formulierung (verbal, Block- oder Flussdiagramm, Struktogramm o.ä.)

**Lösung:**

```
static int HyG(u,r,s) {
    int[] array = new int[u]; int x = 0; int k = 0;
    for (int i=1; i<=s; i++)
        { x = rand(u); if ( x > r ) { u = u--; } else { r = r-1; u--; k++; } }
    return k; }
```

## Aufgabe 4: Negative Binomialverteilung II

Ein idealer Würfel werde so oft geworfen, bis die  $r$ -te Sechs fällt (wobei  $r \in \mathbb{N}$  eine vorgegebene Konstante bezeichnet). Die Anzahl der dazu benötigten Würfe (einschließlich dessen der die Sechs ergibt) werde mit  $X$  bezeichnet.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X = k)$  für  $k = 0, 1, \dots$
- Was fällt ihnen im Spezialfall  $k = 1$  auf?

### Lösung:

- Wir wissen das im  $k$ -ten Wurf eine Sechs fällt und in den  $k-1$  vorherigen Würfeln  $r-1$  Sechsen.

$S =$  Anzahl der Sechsen

$$S \sim \text{Bi}(k-1, \frac{1}{6})$$

$$\Rightarrow P(X = k) = \frac{1}{6} * P(S = r-1) = \frac{1}{6} * \binom{k-1}{r-1} * \left(\frac{1}{6}\right)^{r-1} * \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1-(r-1)}$$

- Für  $k = 1$  ergibt sich die Wahrscheinlichkeit  $1/6$ . Es handelt sich somit um die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf eine Sechs fällt.

## Aufgabe 5: Bankkunden

Die zufällige Anzahl  $K$ , die innerhalb einer Stunde eine Bank betritt, sei mit dem Parameter  $\lambda = 30$  poissonverteilt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt  $P(K = 4)$ ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt  $P(K < 30)$ ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen in einer halben Stunde genau 11 Kunden in die Bank?

HINWEIS: Die Ereignisse können unter Verwendung der Konstante  $e$  (also ohne Dezimaldarstellung) ausgedrückt werden.

### Lösung:

$$K \sim \text{Pois}(\lambda), \text{ mit } \lambda = EX = 30 \text{ und } P(K = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\text{a) } P(K = 4) = \frac{30^4}{4!} e^{-30}$$

$$\text{b) } P(K < 30) = \sum_0^{29} \frac{30^k}{k!} e^{-30}$$

- Da gilt;  $\lambda = EX = 30$  und der Erwartungswert bei halbiertem Zeit, bei einer Poissonverteilung gerade der halbierte Erwartungswert ist gilt jetzt  $\lambda = \frac{30}{2} = 15$ .

$$\Rightarrow P(K = 11) = \frac{15^{11}}{11!} e^{-15}$$