

Aufgabe 1: Kartons

Karton A enthält 8 Glühbirnen, von denen 3 defekt sind, Karton B enthält 5, darunter 2 defekte. Jedem Karton wird zufällig eine Glühbirne entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass...

- beide Birnen defekt sind?
- eine defekt und eine nicht defekt ist?
- die defekte aus Karton A stammt, wenn eine defekt ist und eine nicht defekt ist?

Lösung:

X = #der defekten Glühbirnen, von zwei gezogenen. Eine aus Karton A, die andere aus B.

D_i = Die Glühbirne aus Karton i ist defekt.

$$a) \quad P(X = 2) = P(D_A \cap D_B) = \binom{3}{8} * \binom{2}{5}$$

$$b) \quad P(X = 1) = P\left((D_A \cap \bar{D}_B) \cup (D_B \cap \bar{D}_A)\right) = P(D_A) * P(\bar{D}_B) + P(\bar{D}_A) * P(D_B) \\ = \binom{3}{8} * \binom{3}{5} + \binom{5}{8} * \binom{2}{5}$$

$$c) \quad P(D_A | X = 1) = \frac{P(D_A \cap (X = 1))}{P(X = 1)} = \frac{P(D_A) * P(\bar{D}_B)}{P(X = 1)} = \frac{\binom{3}{8} * \binom{3}{5}}{\left(\binom{3}{8} * \binom{3}{5} + \binom{5}{8} * \binom{2}{5}\right)}$$

Aufgabe 2: Skatspiel

Aus einem Skatspiel (32 Karten) wird eine Karte gezogen, und wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A := „Es wird eine Sieben oder eine Herzbild gezogen“

B := „Es wird ein Bube gezogen“

C := „Es wird eine Herzkarte gezogen“

Man untersuche ob...

- A und B,
- A und C,
- B und C,
- A, B und C

...unabhängige Ereignisse sind.

Lösung:

$$\Omega = \{(i, j) \mid i \in \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\} \wedge j \in \{Ass, König, Dame, Bube, 10, 9, 8, 7\}\}$$

$$\Rightarrow \#\Omega = 32$$

$$A = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Ass, König, Dame, Bube\} \vee i \in \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\} \wedge j \in \{7\}\}$$

$$\Rightarrow \#A = 8$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8}{32}$$

$$B = \{(i, j) \mid i \in \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\} \wedge j \in \{Bube\}\}$$

$$\Rightarrow \#B = 4$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{32}$$

$$C = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Ass, König, Dame, Bube, 10, 9, 8, 7\}\}$$

$$\Rightarrow \#C = 8$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{8}{32}$$

$$a) (A \cap B) = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Bube\}\} \Rightarrow \#(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

$$P(A) * P(B) = \frac{8}{32} * \frac{4}{32} = \frac{1}{32} = P(A \cap B) \Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind unabhängig.}$$

$$b) (A \cap C) = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Ass, König, Dame, Bube, 7\}\} \Rightarrow \#(A \cap C) = 5 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{5}{32}$$

$$P(A) * P(C) = \frac{8}{32} * \frac{8}{32} = \frac{2}{32} \neq \frac{5}{32} = P(A \cap C) \Rightarrow A \text{ und } C \text{ sind nicht unabhängig.}$$

$$c) (B \cap C) = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Bube\}\} \Rightarrow \#(B \cap C) = 1 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{32}$$

$$P(B) * P(C) = \frac{8}{32} * \frac{4}{32} = \frac{1}{32} = P(B \cap C) \Rightarrow B \text{ und } C \text{ sind unabhängig.}$$

$$d) (A \cap B \cap C) = \{(i, j) \mid i \in \{Herz\} \wedge j \in \{Bube\}\} \Rightarrow \#(A \cap B \cap C) = 1 \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}$$

$$P(A) * P(B) * P(C) = \frac{8}{32} * \frac{4}{32} * \frac{8}{32} \neq \frac{1}{32} = P(A \cap B \cap C)$$

$\Rightarrow A, B$ und C sind nicht unabhängig.

Aufgabe 3: Geschlechterkonstellationen

Von einem Ehepaar sei bekannt, dass es $n(\geq 1)$ Kinder hat. Man interessiert sich nun für die folgenden Ereignisse:

A := „unter den n Kindern sind beide Geschlechter vertreten“

B := „unter den n Kindern befindet sich höchstens ein Mädchen“

C := „das (i .S. der Geburtenreihenfolge) i -te Kind ist ein Mädchen ($i = 1, \dots, n$)“

Dabei kann angenommen werden, dass alle möglichen Geschlechterkonstellationen gleich wahrscheinlich sind. Untersuchen Sie ob...

- Die Ereignisse A und B unabhängig sind
- Die Ereignisse W_1, \dots, W_n vollständig unabhängig sind.

Lösung:

Da die Kinder unterscheidbar sind (Geburtenreihenfolge). Kann man annehmen das es sich bei der Berechnung aller möglichen Geschlechterkonstellationen um Modell I handelt. (Aus einer Urne mit 2 Kindern (Junge und Mädchen) wird ohne Zurücklegen n mal gezogen.)

$$\Rightarrow \#\Omega = 2^n$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den n Kindern beide Geschlechter vertreten sind, lässt sich durch die Division der günstigen durch alle möglichen Fälle berechnen. Die günstigen Fälle sind im Grunde genommen alle Fälle bis auf die bei denen NUR Jungen oder NUR Mädchen vertreten sind.

$$\Rightarrow \#A = 2^n - 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2^n - 2}{2^n}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den n Kindern höchstens ein Mädchen dabei ist, lässt sich durch die Möglichkeit, dass kein Mädchen dabei ist, plus die Möglichkeiten das genau ein Kind dabei ist, durch alle möglichen Geschlechterkonstellationen berechnen.

$$\Rightarrow \#B = 1 + n \Rightarrow P(B) = \frac{1 + n}{2^n}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Schnittes sind nur die Möglichkeiten, das ein Mädchen vertreten ist, durch alle möglichen Geschlechterkonstellationen.

$$\Rightarrow \#(A \cap B) = n \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$$

Um nun zu testen ob A und B unabhängig sind müssen die beiden Wahrscheinlichkeiten gleichgesetzt werden.

$$P(B) * P(A) = P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1+n}{2^n} * \frac{2^n - 2}{2^n} = \frac{n}{2^n} \Leftrightarrow \frac{2^n + n2^n - 2n - 2}{n2^n} = 0$$

Da die Gleichung nur für $n=1$ und $n=3$ erfüllt ist. Sind A, B nur für die n unabhängig.

- Jedes Geschlecht ist gleich wahrscheinlich. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das i -te Kind ein Mädchen ist, jedes mal 0.5.

$$P(W_i) = \frac{1}{2} \wedge P(W_1 \cap \dots \cap W_n) = \frac{1}{2^n} \text{ die Wahrscheinlichkeit für NUR Mädchen.}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} = P(W_1 \cap \dots \cap W_n) \Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind unabhängig.}$$

Aufgabe 4: Weitere Aussagen über Unabhängigkeit

Untersuchen Sie, welche der Teilaussagen der nachfolgenden Behauptung richtig sind.
(Zutreffendes ankreuzen und begründen!)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathfrak{F}$. Dann gilt:

- a) A, B und C paarweise unabhängig \wedge A unabhängig mit $B-C \Rightarrow A, B, C$ vollständig unabhängig.
 a. Richtig
 b. Falsch
 c. „weiß nicht“
- b) A unabhängig mit $B \wedge B-C$ unabhängig mit $A \wedge B \cap C$ unabhängig mit $A \Rightarrow A$ unabhängig mit C
 a. Richtig
 b. Falsch
 c. „weiß nicht“
- c) Sind A, B, C (vollständig) unabhängig, können $A \cap B$ und $B \cap C$ nicht unabhängig sein.
 a. Richtig
 b. Falsch
 c. „weiß nicht“
- d) A unabhängig mit $B \wedge C-B$ unabhängig mit $A \wedge B \cap C$ unabhängig mit $A \Rightarrow A$ unabhängig mit C .
 a. Richtig
 b. Falsch
 c. „weiß nicht“

Lösung:

- a) $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \wedge P(B) \cdot P(C) = P(B \cap C) \wedge P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$
 $\Rightarrow P(A) \cdot P(B - C) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B \cap \bar{C}) \Leftrightarrow P(A \cap B \cap \bar{C})$
 $P(A \cap B) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A \cap B \cap C)$
 $\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(B \cap \bar{C}) \Leftrightarrow P(A) \cdot (P(B) - P(B \cap \bar{C}))$
 $\Leftrightarrow P(A) \cdot (P(B) - P(B - C)) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B \cap C) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
- b) „Gegenbeweis fehlt“
- c) „Gegenbeweis fehlt“
- d) $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \wedge P(A) \cdot P(C - B) = P(A \cap \bar{B} \cap C) \wedge P(A) \cdot P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C)$
 $\Rightarrow P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B \cap C) + P(A) \cdot P(C - B)$
 $\Leftrightarrow P(A) \cdot (P(B \cap C) + P(C - B)) \Leftrightarrow P(A) \cdot (P(C \cap B) + P(C \cap \bar{B})) \Leftrightarrow P(A) \cdot P(C)$