Mathe III.1 Übungsblatt Nr.3

Aufgabe 1: Axiomatik X0

Sei Ω eine nicht-leere Menge, und seien $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse, Kreuzen Sie die Ihrer Meinung nach zutreffenden Antworten an:

Der Mengentheoretische Ausdruck für…

a) „keines der Ereignisse tritt sein“ lautet :
   a. [ ] $\overline{A \cap B \cap C}$
   b. [x] $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
   c. [ ] $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
   d. [ ] „weiß nicht“

b) „höchstens zwei Ereignisse treten ein“:
   a. [ ] $\overline{A \cup B \cup C}$
   b. [x] $\overline{A \cap B \cap C}$
   c. [ ] $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
   d. [ ] „weiß nicht“

c) „genau zwei Ereignisse treten ein“:
   a. [x] $\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$
   b. [ ] $\left(A \cup B \cup \overline{C}\right) \cap \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\overline{A} \cup B \cup C\right)$
   c. [ ] $\overline{A \cap B \cap C}$
   d. [ ] „weiß nicht“

Lösung:

Zu (a): Der Ausdruck dafür, dass alle Ereignisse Stattfinden lauten $\left(A \cup B \cup C\right)$, dies ist das Einzige Ereignis, welches NICHT eintreten darf, somit ergibt sich für (a): $\overline{\left(A \cup B \cup C\right)} \rightarrow deMorgan \rightarrow \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$. Nach deMorgan gilt auch für (a).a und (a).b weiter: $\left(\overline{A \cap B \cap C}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right)$ (in Worten: Nicht A oder Nicht B oder Nicht C).

Zu (b): Die Gegenwahrscheinlichkeit, dafür das höchstens 2 Ereignisse eintreten, wäre die, dass alle drei Ereignisse eintreten. $\left(A \cap B \cap C\right)$. Daraus ergibt sich die Lösung (b).b: $\overline{\left(A \cap B \cap C\right)}$

Zu (c): Es gibt genau drei mögliche Kombinationen, dass genau 2 Ereignisse eintreten. (In Worten: A und B und nicht C, oder A und nicht B und C, oder nicht A und B und C). In der Mengenleere kann man dies ausdrücken durch: $\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$

Aufgabe 2: Axiome

Es sei $\Omega \neq 0$. Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\Theta \subset P(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn gilt:

(A“1) $\Omega \in \Theta$
(A“2) $A, B \in \Theta \Rightarrow B - A \in \Theta$
(A“3) $A, B \in \Theta \Rightarrow A \cap B \in \Theta$

Lösung:
Definition: Ein Mengensystem $\Theta \subset P(\Omega)$ heißt Algebra in Ω, wenn gilt:
(A1) $\Omega \in \Theta$
(A2) $A \in \Theta \Rightarrow \overline{A} \in \Theta$
(A3) $A, B \in \Theta \Rightarrow A \cup B \in \Theta$

Zu Zeigen: (A“1) bis (A“3) $\Rightarrow$ (A1) bis (A3)
(A“1) bis (A“3) $\Leftarrow$ (A1) bis (A3)

„$\Rightarrow$“
(A“1) $\Leftrightarrow$ (A1)
(A“2) : $A, B \in \Theta \xrightarrow{(A''1)} A, \Omega \in \Theta \Rightarrow \Omega - A\Theta \Rightarrow \overline{A} \in \Theta \Rightarrow$ (A2)
(A“3) : $A, B \in \Theta \xrightarrow{(A2)} \overline{A}, \overline{B} \in \Theta \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \in \Theta \xrightarrow{(A2)} \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \Theta \Rightarrow A \cup B \in \Theta \Rightarrow$ (A3)

„$\Leftarrow$“
(A1) $\Leftrightarrow$ (A1)
(A3) : $A, B \in \Theta \xrightarrow{(A2)} \overline{A}, \overline{B} \in \Theta \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \in \Theta \xrightarrow{(A2)} \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \Theta \Rightarrow A \cap B \in \Theta \Rightarrow$ (A“3)
(A2) : $A \in \Theta \wedge B \in \Theta \xrightarrow{(A2)} A, \overline{B} \in \Theta \xrightarrow{(A''3)} A \cap \overline{B} \in \Theta \Leftrightarrow A - B \in \Theta \Rightarrow$ (A“2)

Aufgabe 3: Ereignisse

Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer $\sigma -$Algebra Θ in einer Menge $\Omega \neq 0$. Zeigen Sie, dass für beliebige $A, B \in \Theta$ gilt:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
b) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
c) $A \subset B \Rightarrow P(A \Delta B) = P(B - A)$

Lösung:

a) $P(A \cup B) \Leftrightarrow P((A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \cup (A \cap B))$
$\Leftrightarrow P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$
$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) $P(A \Delta B) \Leftrightarrow P((A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B))) \Leftrightarrow P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B))$
$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) - (A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

c) $P(A \Delta B) \Leftrightarrow P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)) \to A \subset B \to P(A \cap B) = P(A)$
$\Rightarrow P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)) \Leftrightarrow P(A - A) + P(B - A) \Leftrightarrow P(\varnothing) + P(B - A)$

Aufgabe 4: Mengenlimites

a) Es sei $(A_n), n \in IN$, eine unendliche Folge von Ereignissen aus einer $\sigma -$ Algebra Θ in einer Menge $\Omega \neq 0$. Man betrachte die Ereignisse

$$A_* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} A_m \, , A^* := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Und zeige $A_* \subset A^*$

b) Unter der Annahme, dass für eine gedachte unendliche Serie von Würfen mit einem idealen Würfel A_n das Ereignis „im i-ten Wurf fällt eine Sechs“ bezeichnet, interpretiere man A_* und A^* .

Aufgabe 5: Nachweis Algebren

Untersuchen Sie, ob die folgende Mengensysteme Θ Algebren bzw. $\sigma -$ Algebren in $\Omega = [0, \infty)$ sind.

a) $\Theta = \{ A \subset \Omega :$ eine der Mengen $A, \overline{A}$ enthält keine Primzahl $\}$

b) $\Theta = \{ A \subset \Omega :$ eine der Mengen $A, \overline{A}$ ist endlich $\}$

(Die leere Menge ist endlich!)