Mathe III.1 Übungsblatt Nr.2

Aufgabe1: Fünf Glücksräder

Fünf Glücksräder werden gleichzeitig gedreht. Zum Stillstand gekommen, zeigt jedes eine der Zahlen 1, ... , 30.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau vier dieser Zahlen gleich?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die fünf Glücksräder insgesamt genau zwei verschiedene Zahlen zeigen.

Lösung:

a) Man muss alle günstigen Fälle durch die kompletten möglichen Fälle dividieren. Die möglichen fälle sind wie folgt zu berechnen: $(30)^5$, da es 5 Räder gibt mit je 30 Zahlen und somit haben alle 5 Räder 30 Mögliche Ausgänge. Die günstigen Fälle müssen folgender maßen berechnet werden: $30*29*1*1*1*5$. Die erste Zahl kann beliebig sein, die zweite muss sich nur von der ersten Unterscheiden. Die restlichen 3 Räder müssen die gleiche Zahl wie das 1. Rad. Es gibt insgesamt 5 Permutationen, um zu dieser Kombination zu kommen. Somit folg die Wahrscheinlichkeit: $\frac{30^2 * 5}{30^5}$

b) Ziehe zwei Zahlen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge aus 30$\Rightarrow \binom{30}{2}$. Lege diese danach in eine Urne, aus dieser Urne wird 5 Mal gezogen. Da dabei auch alle 5 Zahlen auf einmal auftreten können, müssen diese Möglichkeiten wieder abgezogen werden. $\Rightarrow 2^5 - 2$. Insgesamt ergibt sich jetzt die Wahrscheinlichkeit$\Rightarrow \frac{\binom{30}{2}\left(2^5-2\right)}{30^5}$.

Aufgabe 2: „Lotto1“ 6 aus 49 IV

Beim Lotto „6aus49“ (ohne Zusatzzahl) gewinnt man, sobald mindestens 3 „Richtige“ auf dem Tippschein stehen. Sie geben ein und denselben Tipp in 6 aufeinander folgenden Wochen ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen sie.

a) nichts
b) einmal
c) zweimal

Lösung:

$$p = \text{Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn} \Rightarrow \sum_{k=3}^{6} \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

$$q = \text{Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn.} \Rightarrow 1 - p$$

X = Wahrscheinlichkeit für k gewinne in 6 Wochen.
$X \sim Bi(6, p)_k$

a) Gesucht: $P("nichts") \Rightarrow Bi(6, p)_0 \Leftrightarrow \binom{6}{0} p^0 q^6$

b) Gesucht: $P("einmal") \Rightarrow Bi(6, p)_1 \Leftrightarrow \binom{6}{1} p^1 q^5$

c) Gesucht: $P("zweimal") \Rightarrow Bi(6, p)_2 \Leftrightarrow \binom{6}{2} p^2 q^4$

Aufgabe 3: Multihypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthalte R rote, S schwarze und W weiße Kugeln (R+S+W = U). Sie ziehen N Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind davon exakt r rot, s schwarz und w weiß, wenn es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt?

Lösung:

$$P(R = r, S = s, W = w) = \frac{\binom{R}{r}\binom{S}{s}\binom{W}{w}}{\binom{U}{N}}$$

Aufgabe 4: „Runs“

Es seien a und b natürliche Zahlen. Jedes "Wort", das sich aus a Buchstaben "A" und b Buchstaben "B" bilden lässt, werde auf ein Kärtchen geschrieben. Anschließend werde eins dieser $\binom{a+b}{a}$ Kärtchen zufällig gezogen. Das darauf stehende Wort werde nun auf so genannte "runs", d.h. Teilwörter maximaler Länge, die durch Wiederholung ein- und desselben Buchstabens entstehen, untersucht.
(So entsteht z.B. das Wort:

ABAAABBABBBAAB

aus 4 A-runs 4 B-runs, von links mit einem A-run beginnend.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(a,b;\alpha,\beta)$, dass ein auf diese Weise zufällig bestimmtes Wort exakt α A-runs und β B-runs enthält?

Lösung:
Stellen α A-Boxen und β B-Boxen auf, in die bereits ein entsprechender Buchstabe gelegt wird. Verteile nun die restlichen $a-\alpha$ A’s („ununterscheidbar“) auf die α -Boxen und die $b-\beta$ B’s („ununterscheidbar“) auf die β -Boxen. („Mehrfachbelegung“).

$\Rightarrow$ Modell IV $\Rightarrow \binom{a-\alpha+\alpha-1}{\alpha-1}\binom{b-\beta+\beta-1}{\alpha-1} \Leftrightarrow \binom{a-1}{\alpha-1}\binom{b-1}{\beta-1}$

Insgesamt gibt es drei mögliche Runarten: $\alpha=\beta \;\wedge \alpha+1=\beta \;\; \alpha=\beta+1$

$$\Rightarrow P(a,b;\alpha,\beta) \text{ für } \alpha=\beta = \frac{\binom{a-1}{\alpha-1}\binom{b-1}{\beta-1}}{\binom{a+b}{a}}$$

$$\wedge\, P(a,b;\alpha,\beta) \text{ für } \alpha\neq\beta = 2*\frac{\binom{a-1}{\alpha-1}\binom{b-1}{\beta-1}}{\binom{a+b}{a}}$$

Aufgabe 5: Zwei Würfel

Ein idealer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:

A := die Summe der Augenzahlen ist 10
B := das Maximum der geworfenen Augenzahlen ist 4
C := die erste gewürfelte Zahl ist kleiner als die zweite

a) Beschreiben Sie diese Ergebnisse in einem Mengenmodell, d.h. stellen Sie die Ereignisse A,B und C als Teilmengen einer Grundmenge Ω dar (z.B.: durch Aufzählung der Elemente)
b) Versuchen Sie, diese 4 Mengen in einem geometrischen Modell zu Visualisieren.
c) Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse A, B und C.

Lösung:

a) $$\Omega = \{\ (i,j) \mid 1 \le i, j \le 6\ \} \Rightarrow \Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$A = \{\ (i,j) \mid 1 \le i, j \le 6 \wedge i + j = 10\ \} \Rightarrow A = \begin{Bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & (6,4) \\ - & - & - & - & (5,5) & - \\ - & - & - & (4,6) & - & - \end{Bmatrix}$$

$$B = \{\ (i,j) \mid 1 \le i, j \le 6 \wedge \max\{i,j\} = 4\ \} \Rightarrow B = \begin{Bmatrix} - & - & - & (4,1) & - & - \\ - & - & - & (4,2) & - & - \\ - & - & - & (4,3) & - & - \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{Bmatrix}$$

$$B = \{\ (i,j) \mid 1 \le i, j \le 6 \wedge i < j\ \} \Rightarrow B = \begin{Bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ (1,2) & - & - & - & - & - \\ (1,3) & (2,3) & - & - & - & - \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & - & - & - \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & - & - \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & - \end{Bmatrix}$$

b) Visualisierung mit Hilfe von Kreisdiagrammen. Hier wurde darauf allerdings verzichtet.

c) $$P(Ereignis) = \frac{\#Ereigniss}{\Omega} \Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{36} \wedge P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{7}{36} \wedge P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{15}{36}$$