Mathe III.1 Übungsblatt Nr.1

Aufgabe 1: Zahlen

a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich mit Hilfe der Ziffer 1,…,8 bilden?
b) Wie lautet die Antwort zu a), wenn keine Ziffer mehrmals verwendet werden darf?
c) Wie lautet die Antwort zu b), wenn außerdem verlangt wird, dass die verwendeten Ziffern – von links beginnend – aufsteigend geordnet auftreten?

Lösung:

a) Es handelt sich hierbei um eine Ziehung von 4 Ziffern aus 8 möglichen, mit zurücklegen, jedoch ohne Ordnung. $\Rightarrow 8^4$
b) Diesmal handelt es sich um eine Ziehung von wieder 4 Ziffern aus 8 möglichen, jedoch mit zurücklegen. $\Rightarrow 8^{\underline{4}}$
c) Jetzt handelt es sich um eine Ziehung von 4 Ziffern aus 8 möglichen ohne zurücklegen. Und unter Betrachtung der Reihenfolge. Bei einer gezogenen Folge von 4 Ziffern gibt es immer eine mögliche sortierte Ordnung: $\Rightarrow \binom{8}{4}$.

Aufgabe 2: Flaggen

Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich F Flaggen auf M in einer Reihe stehende Flaggenmasten verteilen? Dabei werde angenommen, dass die Zahl der Flaggen für jeden Mast frei wählbar sei, wobei jeder Mast allein sämtliche Flaggen aufnehmen kann. (Aus diplomatischen Erwägungen wird die Reihenfolge der Masten und die der Flaggen auf jedem Mast von Interesse sein.)

Lösung:

Man nimmt an, dass man erstmal mit dem Chip-Box-Modell die F Flaggen auf die M Masten verteilen. Ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reinfolge. Idee: Man nimmt erstmal an, dass alle Flaggen weiß sind und verteilt diese. Aus dem Modell IV ergibt sich so: $\binom{F+M-1}{F}$. Um jetzt wieder die Ordnung ins Spiel zu bringen muss man die Flaggen wieder „einfärben“ es gibt F verschiedene Flaggen Typen, somit F! viele Möglichkeiten diese einzufärben.

$$\Rightarrow \binom{F+M-1}{F}F!$$

Aufgabe 3: „Lotto0“: 6 aus 49:

Beim Lotto „6 aus 49“ werden sechs „Richtig“ und eine Zusatzzahl gezogen. Man gewinnt, sobald mindestens 3 „Richtige“ auf dem Tippschein stehen. Sie geben einen Tipp ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit…

a) gewinnen sie.
b) Haben sie außerdem 4 „Richtige“
c) Enthält ihr Tippschein fünf „Richtige“ und die Zusatzzahl?

Lösung:

a) Es gibt vier Möglichkeiten zu gewinnen. 1. Man hat 3 „Richtige“, 2. Man hat 4 „Richtige“, 3. Man hat 5 „Richtige“ und 4. Man hat 6 „Richtige“.
$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{6} \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}} \Leftrightarrow \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}}$$

b) Hier ist die genau Wahrscheinlichkeit gefragt das man genau 4 „Richtige“ auf dem Tippschein hat. $\Rightarrow \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

c) $\Rightarrow \frac{\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0}}{\binom{49}{6}}$

Aufgabe 4: Münztürme Euro

Wie viele verschieden geformte Türme lassen sich aus 10 Münzen aufschichten, wenn 5 Cent, 10 Cent und 50 Cent Stücke sowie 1 Euro und 2 Euro Stücke in hinreichender Zahl zur Verfügung stehen und…

a) die Münzen in beliebiger Reihenfolge aufgeschichtet werden können,
b) der Wert der Münze mit zunehmender Höhe nicht zunehmen darf.

Lösung:

a) Man nimmt an man hat eine Urne mit 5 verschiedenen Münzen. Man zieht jetzt eine Münze aus der Urne und füllt sie durch eine identische Münzart wieder auf. Dies 10 Mal. Somit hat man 10 Ziehungen aus 5 Möglichkeiten. $\Rightarrow 5^{10}$
b) Der Versuch ist identisch, außer dass man nach dem Ziehen, die Münzen noch in eine Reihenfolge bringen muss. Daraus ergibt sich eine Ziehung mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge. $\Rightarrow \binom{10+5-1}{10} \Leftrightarrow \binom{10+5-1}{5-1}$

Aufgabe 5: Urnenfüllung

Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich eine Urne mit roten, weißen und schwarzen Kugeln derart füllen, dass insgesamt U Kugeln enthalten sind?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einer zufälligen Füllung nur 1 Kugel rot?

Lösung:

a) Man nimmt an, dass wir eine Urne haben mit 3 verschiedenen Kugeln (rot , schwarz und weiß) und eine Zweite Urne , in die U viele Kugeln gezogen werden sollen. Wir ziehen nun aus der 1. Urne eine Kugel. Nehmen aus einer anderen Quelle eine Kugel mit identischer Farbe und tun sie in die 2. Urne. Die gezogene Kugel wird zurückgelegt. Dieser Versuch wird U mal wiederholt. Damit wir in der zweiten Urne U Kugeln haben. Daraus Folg eine Ziehung aus 3 Kugeln mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Model IV: $\Rightarrow \binom{U+3-1}{3-1}$

b) Hier nehmen wir die günstigen Fälle geteilt durch alle möglichen Fälle. Aus (a) kennen wir jetzt alle möglichen Fälle. Bei den Günstigen Fällen gehen wir vom Versuchsschema analog zu (a) vor , jedoch haben wir in der 1. Urne jetzt nur noch 2 verschiedene Farben und wir ziehen jetzt nur noch U-1 mal , da wir ja eine rote Kugel schon in die zweite Urne legen müssen. Selbes Modell für die günstigen Fälle:

$$\Rightarrow \binom{U-1+2-1}{2-1} \Rightarrow \frac{\binom{U-1+2-1}{2-1}}{\binom{U+3-1}{3-1}}$$