

Übungsaufgaben zur
"Stochastik für Informatiker"
Serie 3.

1. Axiomatik $X0$

Sei Ω eine nicht-leere Menge und seien $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse. Kreuzen Sie die Ihrer Meinung nach zutreffenden Antworten an:

(Hinweis: Richtige Antworten ergeben Plus-, falsche Minuspunkte; "weiß nicht" ergibt 0 Punkte.)

Der mengentheoretische Ausdruck für

(i) "keines der Ereignisse tritt ein" lautet

(ii) "höchstens zwei der Ereignisse treten ein" lautet

$\overline{A \cap B \cap C}$

$\overline{A \cup B \cup C}$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$\overline{A \cap B \cap C}$

$\overline{A \cup B \cup C}$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

weiß nicht

?

weiß nicht

?

(iii) "genau zwei der Ereignisse treten ein" lautet

$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

$(A \cup B \cup \overline{C}) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)$

$\overline{A \cap B \cap C}$

weiß nicht

?

(3 Punkte)

2. Axiome

Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn gilt:

(A"1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(A"2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

(A"3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

(5 Punkte)

b.w.

3. Ereignisse

Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer σ -Algebra \mathcal{F} in einer Menge $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie, daß für beliebige $A, B \in \mathcal{F}$ gilt:

- (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (ii) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2 P(A \cap B)$
- (iii) $A \subset B \implies P(A \Delta B) = P(B \setminus A)$.

(6 Punkte)

4. Mengengrenzen

- (a) Es sei $(A_n), n \in \mathbf{N}$, eine unendliche Folge von Ereignissen aus einer σ -Algebra \mathcal{E} in Ω . Man betrachte die Ereignisse

$$A_* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} A_m, A^* := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

und zeige $A_* \subset A^*$.

- (b) Unter der Annahme, daß für eine gedachte unendliche Serie von Würfeln mit einem idealen Würfel A_n das Ergebnis "im n -ten Wurf fällt eine 6" bezeichnet, interpretiere man A_* und A^* .

(8* Punkte)

5. Nachweis Algebren

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme \mathcal{A} Algebren bzw. σ -Algebren in $\Omega = [0, \infty)$ sind:

- (i) $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega: \text{eine der Mengen } A, \bar{A} \text{ enthält keine Primzahl} \}$
- (ii) $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega: \text{eine der Mengen } A, \bar{A} \text{ ist endlich} \}$.

(Die leere Menge ist endlich!)

(5 Punkte)

Abgabe: bis 03.11.04 9.00 Uhr Kasten 124 (grün)

Besprechung und Rückgabe:
in den Übungen ab 10.11.04

Hinweis: Geben Sie außer Ihrem Namen auch Ihre Übungsgruppe mit an.