

**Übungsaufgaben zur  
"Stochastik für Informatiker"  
Serie 12.**

---

1. Čebyšev-Ungleichung

Ein nicht notwendig idealer Würfel werde  $N$  mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem einzelnen Wurf eine Sechsz zu werfen, werde mit  $p$  ( $\in [0, 1]$ ) bezeichnet. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit  $q$  dafür, daß die Gesamtzahl  $S$  der in diesen  $N$  Würfeln geworfenen Sechsen nicht kleiner als eine gegebene Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit  $Np < k \leq N$  ist.

- (i) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe  $q$  exakt errechnet werden kann.
- (ii) Wie läßt sich mit Hilfe der Čebyšev-Ungleichung eine obere Schranke für  $q$  ermitteln?
- (iii) Vergleichen Sie den unter (i) ermittelten exakten Wert mit der gemäß (ii) gewonnenen Schranke im Fall  $N = 10$ ,  $p = \frac{1}{5}$  und  $k = 8$  !

( 8 Punkte)

---

2. Markov-Ungleichung II.

Es seien  $X$  eine Zufallsgröße mit endlicher Streuung und  $y > 0$  eine gegebene Konstante. Zeigen Sie, daß folgende Ungleichungen gelten:

- (a)  $P(X - EX \geq y) \leq \frac{E|X-EX|}{y}$
- (b)  $P(X - EX \geq y) \leq \frac{E(X-EX)^+}{y}$ .

(Dabei bezeichnet  $x^+$  für jede reelle Zahl  $x$  deren Positivteil:

$$x^+ := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

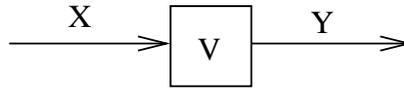
(6 Punkte)

---

b.w.

### 3. Spannung

Wird an den Eingang eines Verstärkers  $V$  die (zufällige) Spannung  $X$  gelegt, müßte am Ausgang theoretisch die Spannung  $aX$  erscheinen ( $a$  bezeichnet den Verstärkungsfaktor), praktisch erscheint jedoch die etwas verrauschte Spannung  $Y$ :



Für welchen Wert von  $a \in \mathbb{R}$  wird der mittlere quadratische Fehler zwischen  $aX$  und  $Y$ , d.h.,

$$\Delta(a) := E(Y - aX)^2$$

am kleinsten? Wie groß ist der kleinstmögliche Wert von  $\Delta(a)$ ?

(Sie können  $X, Y \in \mathcal{L}_2$  annehmen.)

(6 Punkte)

---

**Abgabe:** bis 19.01.05 9.00 Uhr Kasten 124 (grün)

**(Aufgabe 2: ZÜ am 21.01.05)**

**Besprechung und Rückgabe:** in den Übungen ab 21.01.05

**Hinweis:** Geben Sie außer Ihrem Namen auch Ihre Übungsgruppe mit an.