Boolsche Algebra

In dieser Aufgabe soll noch einmal der Umgang mit der Boolschen Algebra geuebt werden. Zur Erinnerung deshalb hier zunaechst noch einmal die grundlegenden Regeln (Nummerierung entsprechenend den GTI-Folien):

Notation: $a \cdot b = a\ and\ b \quad ; \quad a + b = a\ or\ b \quad ; \quad \bar{a} = not\ a$

Axiome: $Grundmenge B = \{0, 1\}$

B_1	$Kommutativitaet$	$\forall a, b \in B : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
B_2	$Distributivitaet$	$\forall a, b, c \in B : (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), (a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$
B_3		$\forall a \in B : a + 0 = a, a \cdot 1 = a$
B_4		$\forall a \in B : a + \bar{a} = 1, a \cdot \bar{a} = 0$
B_5		$\exists a, b \in B : a \neq b$

Lemmata:

2.1	$Eindeutigkeitder0$	$\exists n \in B : \forall a \in B : a + n = a \Rightarrow n = 0$
	$Eindeutigkeitder1$	$\exists e \in B : \forall a \in B : a \cdot e = a \Rightarrow e = 1$
2.2	$EindeutigkeitdesKomplements$	$\forall a \in B : \exists k \in B : [a + k = 1 unda \cdot k = 0 \Rightarrow k = \bar{a}]$
2.3	$Idempotenz$	$\forall a \in B : a + a = a = a \cdot a$
2.4		$\forall a \in B : a + 1 = 1, a \cdot 0 = 0$
2.5		$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$
2.6	$DoppeltesKomplement$	$\forall a \in B : \bar{\bar{a}} = a$
2.7	$Absorption$	$\forall a, b \in B : a + a \cdot b = a, a \cdot (a + b) = a$
2.8	$Assoziativitaet$	$\forall a, b, c \in B :$
		$a + (b + c) = (a + b) + c$
		$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2.9	$DeMorgan$	$\forall a, b \in B :$
		$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
		$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

Bei der Anwendung der Regeln nicht den Fehler machen arithmetische Regeln einzusetzen. Boolsche Algebra verhaelt sich an einigen Stellen anders!!! Bitte bei jedem Umformungsschritt die verwendete(n) Regel(n) angeben

a)Welche der folgenden 4 Boolschen Ausdruecke sind identisch?

Tip: Versuchen sie alle Terme auf eine der Normalformen zu bringen

i)$((\overline{a + \bar{b}}) + (\bar{a} \cdot b)) + \bar{c}$

ii) $\overline{(a \cdot c) + ((\overline{b + 0}) \cdot c)}$

iii) $(\overline{a \cdot c}) \cdot (\bar{a} + \bar{c}) \cdot (b + \bar{c} + b)$

iv) $(\overline{\bar{a} + (b \cdot c))} + (c \cdot (b + c))$

i) $((\overline{a+\bar{b}})+(\bar{a}\cdot b))+\bar{c}$

Musterloesung:

$((\overline{a+\bar{b}})+(\bar{a}\cdot b))+\bar{c}$

$\overset{2.9}{=}((\bar{a}\cdot\bar{\bar{b}})+(\bar{a}\cdot b))+\bar{c}$

$\overset{2.6}{=}((\bar{a}\cdot b)+(\bar{a}\cdot b))+\bar{c}$

$\overset{2.3}{=}(\bar{a}\cdot b)+\bar{c}$ DNF

$\overset{B_2}{=}(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c})$ KNF

ii) $\overline{(a\cdot c)+((\overline{b+0})\cdot c)}$

Musterloesung :

$\overline{(a\cdot c)+((\overline{b+0})\cdot c)}$

$\overset{B_3,2.9}{=}(\overline{a\cdot c})\cdot(\overline{\bar{b}\cdot c})$

$\overset{2.9}{=}(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c})$ KNF

iii) $(\overline{a\cdot c})\cdot(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c}+b)$

Musterloesung :

$(\overline{a\cdot c})\cdot(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c}+b)$

$\overset{2.3,2.9}{=}(\bar{a}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c})$

$\overset{2.3}{=}(\bar{a}+\bar{c})\cdot(b+\bar{c})$ KNF

iv) $(\overline{\bar{a}+(b\cdot c)})+(c\cdot(b+c))$

$(\overline{\bar{a}+(b\cdot c)})+(c\cdot(b+c))$

$\overset{2.7}{=}(\overline{\bar{a}+(b\cdot c)})+c$

$\overset{2.9}{=}(\overline{\bar{a}+(\overline{\bar{b}+\bar{c}})})+c$

$\overset{2.9}{=}(a\cdot(\bar{b}+\bar{c}))+c$

$\overset{B_2}{=}(a+c)\cdot((\bar{b}+\underbrace{\bar{c})+c}_{\bar{c}+c=1})$

$=(a+c)\cdot(\underbrace{\bar{b}+1}_{=1})$

$=a+c$ DNF

Name: Matrikel-Nummer:

Quine/McClusky

Gegeben sei eine Bool'sche Funktion

$$F = a\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,\bar{d} +$$
$$a\,\bar{b}\,c\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}$$

(a) Geben Sie F in der Minterm-Normalform an.

$$F_{Minterm} = a\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,\bar{d} +$$
$$a\,\bar{b}\,c\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}$$

(b) Bestimmen Sie eine <u>minimale</u> Darstellung von F mit Hilfe des Karnaugh- Diagramms: Füllen Sie dazu das auf der nächsten Seite angegebene Diagramm zunächst entsprechend mit Einsen aus. Markieren Sie dann die <u>alle</u> gefundenen Primimplikanten.

Geben Sie die <u>minimale</u> Darstellung hier an:

$$F_{Min} = P_1 + P_2 = \bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{d}$$

(c) Minimieren Sie die Funktion

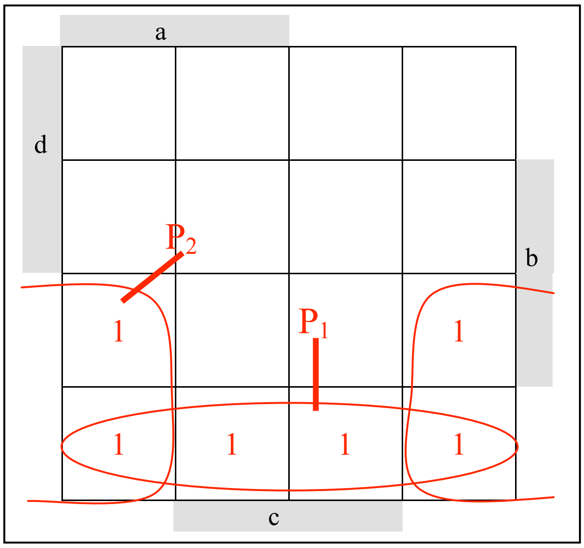
$$G = a\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,\bar{d} +$$
$$a\,\bar{b}\,c\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}$$

mit Hilfe des Quine/McClusky Verfahrens. Das Verfahren benötigt hier 2 Iterationen. Geben Sie die Zwischenergebnisse nach den angegebenen Aktionen des Verfahrens in beiden Iterationen an. Bei der Summe der Konsensusse sind **alle** (d.h. **auch doppelt auftretende**) anzugeben!

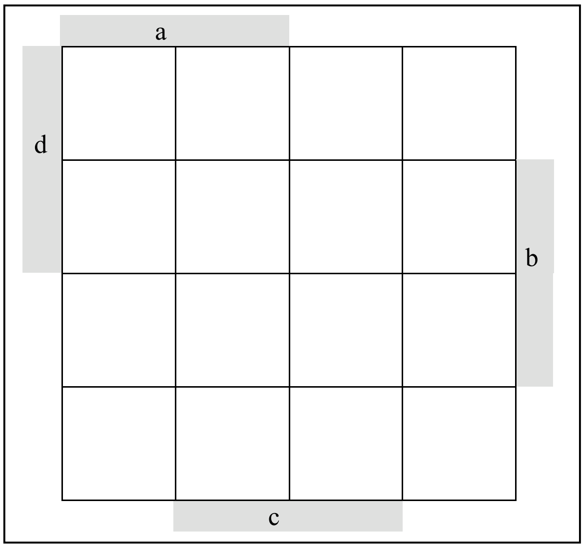
Name: Matrikel-Nummer:

Zu (b):

Auszufüllendes Karnaugh-Diagramm:



Ersatzdiagramm:



Teil (c): Quine / McClusky Verfahren

Nr.	**Aktion / Zwischenergebnisse**
	Ausgangsfunktion G $a\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,c\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}$
1	Summe **aller** „Simplen Konsensusse“: $a\,\bar{c}\,\bar{d} + b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{d} + \bar{b}\,c\,\bar{d}$
	Nach „Streichen von Verlängerungen“ und „Vereinfachen“: $a\,\bar{c}\,\bar{d} + b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{d} + \bar{b}\,c\,\bar{d}$
2	Summe **aller** „Simplen Konsensusse“: $\bar{c}\,\bar{d} + \bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{d}$
	Nach „Streichen von Verlängerungen“ und „Vereinfachen“ $\bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{d}$

Name: Matrikel-Nummer:

Ginsburg/Huffman

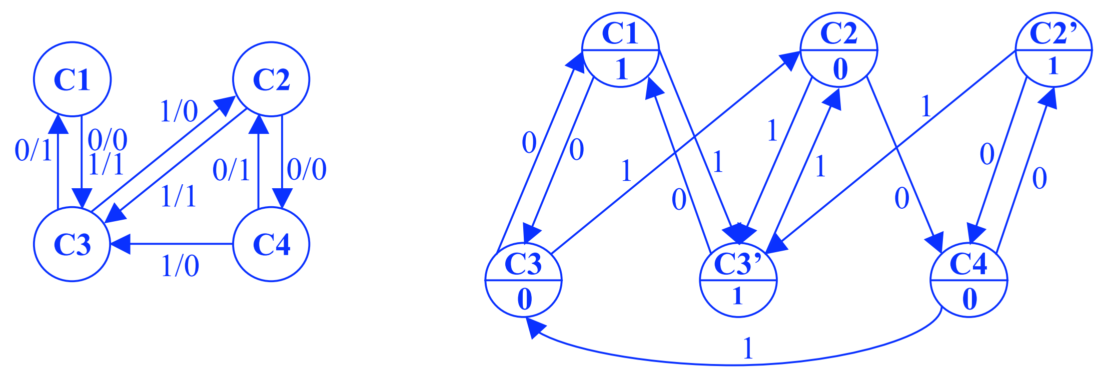
a) Reduktion nach dem Ginsburg/Huffmann-Verfahren:

	1. Schritt			Äquivalenzklassenzuordnung im 2. Schritt			3. Schritt			4. Schritt	
δ/λ	0	1		0	1		0	1		0	1
S1	S5/0	S6/1		A_2	A_2		B_2	B_2	C_1	C_3	C_3
S2	S6/0	S5/1	A_1	A_2	A_2	B_1	B_2	B_2		C_3	C_3
S3	S7/0	S6/1		A_2	A_2		B_3	B_2	C_2	C_4	C_3
S4	S8/0	S5/1		A_2	A_2		B_3	B_2		C_4	C_3
S5	S1/1	S4/0		A_1	A_1	B_2	B_1	B_1	C_3	C_1	C_2
S6	S2/1	S3/0	A_2	A_1	A_1		B_1	B_1		C_1	C_2
S7	S4/1	S6/0		A_1	A_2	B_3	B_1	B_2	C_4	C_2	C_3
S8	S4/1	S5/0		A_1	A_2		B_1	B_2		C_2	C_3

A_1 = { S1, S2, S3, S4 }, B_1 = { S1, S2, S3, S4 },
A_2 = { S5, S6, S7, S8 }, B_2 = { S5, S6 },
C_1 = { S1, S2 }, B_3 = { S7, S8 },
C_2 = { S3, S4 }, C_3 = { S5, S6 },
C_4 = { S7, S8 }

Name: Matrikel-Nummer:

b) Die Zustandsübergangsgraphen des minimierten Mealy-Automaten und dazu äquivalenten Moore-Automaten :

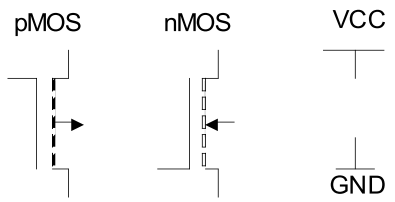


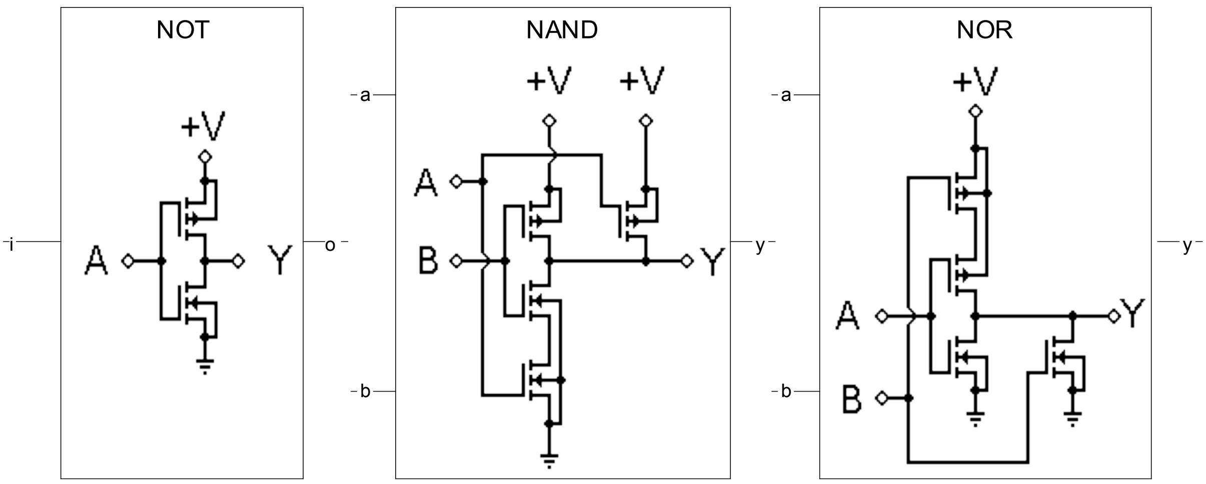
Name: Matrikel-Nummer:

CMOS- und Gatterschaltungen

a) Zeichnen Sie basierend auf den unten dargestellten Schaltsymbolen von **nMOS** und **pMOS** Transistoren die Gatter **NOT**, **NAND** und **NOR** als **CMOS** Gatter.

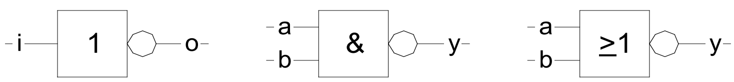
Tipp: Ein pMOS Anreicherungstyp leitet, wenn am Gate eine logische 0, also GND anliegt. Ein nMOS Anreicherungstyp leitet, wenn am Gate eine logische 1, also VCC anliegt.

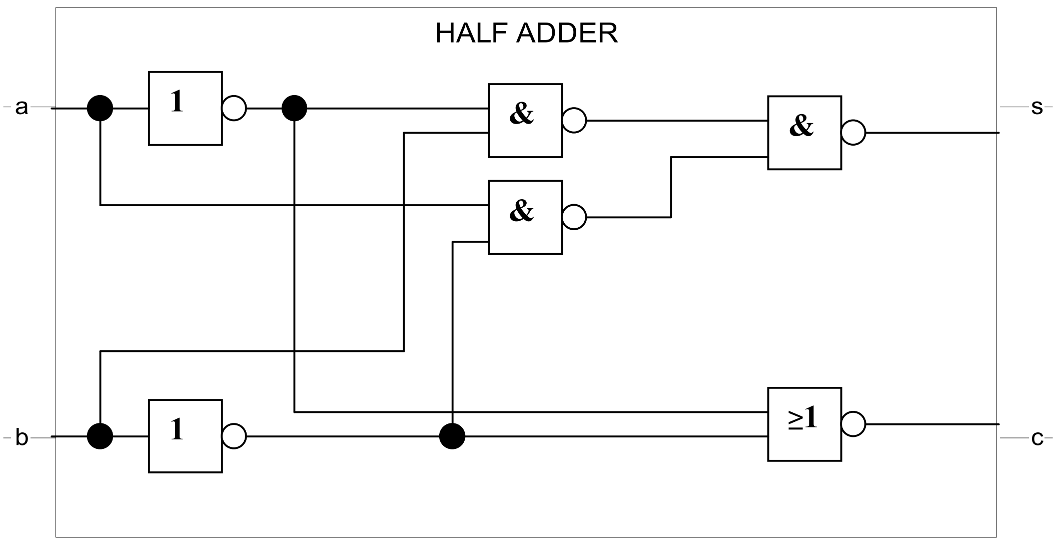




b) Zeichnen Sie basierend auf den Schaltsymbolen der Gatter **NOT**, **NAND** und **NOR** einen Halbaddierer, der die beiden Eingangsbits **a** und **b** zu einer Summe **s** und einem Überlauf **c** addiert. Stellen Sie dazu zunächst die Booleschen Funktionen für **s** und **c** auf.

s = a xor b = $\overline{\overline{\overline{A} \cdot B} \cdot \overline{A \cdot \overline{B}}}$ **c =** a and b = $\overline{\overline{A} + \overline{B}}$





Name: Matrikel-Nummer:

VHDL Signaltiming und Variable

Gegeben sei folgende VHDL-Beschreibung mit gemischten Signal- und Variablenanweisungen.

a) Tragen Sie für jede Signalzuweisung von ‚a' (Zeilen 4 bis 7) die jeweiligen Werte in die Transaktionsliste ein. Achten Sie auf die unterschiedlichen Verzögerungsarten (transport-delay, inertial-delay).
Hinweis: Wenn nichts vor der Signalzuweisung steht, dann wird inertial-delay benutzt!

```
 1 architecture TEST of AUFGABE is
 2    signal a, b : integer := 0;
 3 begin
 4    a <= 6 after 1 ns, 8 after 2 ns,
            18 after 3 ns, 22 after 4 ns,
            11 after 5 ns;
 5    a <= transport 14 after 4 ns;
 6    a <= 8 after 3 ns;
 7    a <= transport 13 after 2 ns;
 8
 9    process (a, b)
10          variable c, d : integer := 0;
11    begin
12          b <= a+1;
13          c := b*4 + 3;
14          d := a + b + c;
14    end process;
16 end TEST;
```

Transaktionsliste

		0ns	1ns	2ns	3ns	4ns	5ns
a	0		6	8	18	22	11
a	0		6	8	18	14	
a	0			8	8		
a	0			13			

Aktueller Wert

b) Tragen Sie die Werte von a, b, c und d für alle gegebenen Zeitpunkte in die entsprechende Signaltrace-Tabelle ein. Es reicht, wenn Sie nur zu den Zeitpunkten, an denen sich etwas ändert, Werte eintragen.

Da in der Sensitivliste des Prozesses die Signale a und b stehen, wird der Prozess bei jeder Signaländerung dieser beiden Signale ausgeführt. Um die Werte in der Signaltrace-Tabelle auszurechnen, können die Gleichungen aus den Zeilen 12, 13 und 14 folgendermaßen geändert werden:

$b = a+1;$
$c = (a+1)*4+3 = 4a+7$
$d = a+a+1+4a+7 = 6a+8$

Signaltrace

t	0	1	2	3	4	5
a	0	0	13	13	13	13
b	1	1	14	14	14	14
c	7	7	59	59	59	59
d	8	8	86	86	86	86

Um nochmals VHDL zu wiederholen, ist zum einen das Vorlesungsskript geeignet, zum anderen das Buch „VHDL – Eine Einführung" von Paul Molitor und Jörg Ritter (ISBN: 3-8273-7047-7).