Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 6

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Übungsgruppe 4
Montag 16:00-18:00
Gunnar Schomaker

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Die Funktion $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ ist total, da jedem Element aus Σ^* ein Element aus Δ^* zugeordnet wird. Die Funktion ist ferner berechenbar, da es möglich ist, eine Turingmaschine zu konstruieren, welche ein Element aus Σ in ein Element aus Δ^+ transformiert. Teilt man nun ein Wort $w \in L$ in seine Bestandteile auf, so erhält man nach der Definition der Funktion f ein Wort aus $f(L)$.

Sei $L_1 = L = \{x_1, x_2, ...\}$ und $L_2 = f(L_1) = f(L) = \{f(x_1), f(x_2), ...\}$.

$$x_i \in L_1 \Leftrightarrow f(x_i) \in L_2$$

Es gilt nun $\underset{\forall i \in \mathbb{N}}{\wedge} x_i \notin L_i \Leftrightarrow f(x_i) \notin L_2$. Hieraus folgt nun $L_1 \leq L_2$.

Sei L_2 nun entscheidbar so gilt nach dem in der Übung nachgewiesenen Sachverhalt, dass L_1 ebenfalls entscheidbar ist.
Sei L_2 nun rekursiv so gilt nach dem in der Übung nachgewiesenen Sachverhalt, dass L_1 ebenfalls rekursiv ist.
Somit ist auch $f(L)$ entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 22 (5 Punkte)
Sei F die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$.
Beweisen Sie per Diagonalisierung, dass F überabzählbar ist.

Wörter Sprachen	L_1	L_2	$L_3 \dots$
w_1	..	..	..
w_2	..	..	..
w_3	..	..	..

Wir erzeugen eine Tabelle, in deren Spalten sich die Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ befinden. In den Zeilen finden sich anschließend alle überhaupt erzeugbaren Wörter (also ∞). In den einzelnen Tabellenfeldern steht die Aussage, ob die Sprache L_i das Wort w_j enthält.
Wir betrachten nun die Diagonale und erzeugen eine Sprache, die genau das Gegenteil der Diagonalen enthält. Diese neue Sprache ist in der Tabelle noch zu keinem Zeitpunkt aufgezählt worden, da die Sprache sich mit bereits vorhandenen Sprachen mindestens an der Stelle der Diagonalen $w_{i,} L_i$ unterscheidet, da die neue Sprache aus dem Gegenteil der Diagonalen gebildet wurde. Wäre diese Sprache bereits aufgezählt worden, so müsste sie sich von sich selber an der Stelle der Diagonalen unterscheiden. Dieses ist offensichtlich nicht möglich, so dass aus diesem Widerspruch folgt, dass F nicht abzählbar ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte)

$L_1 = \{\langle M \rangle | M \text{ hält für endlich viele Eingaben}\}$

$\overline{H} \leq L_1$

Zu tun: Gebe eine berechenbare Funktion f an, für die gilt: $f(\langle M \rangle x) = M'$

Die Maschine M' sei baugleich mit der Maschine M halte aber für 0,1,…,n. Für sämtliche andere Eingaben verhalte sich die Maschine wie M gestartet mit x, so dass sie für diese Eingaben nicht hält.

$L_2 = \{\langle M \rangle | M \text{ hält für unendlich viele Eingaben}\}$

Da wir nun wissen, dass L_1 unentscheidbar ist und L_2 das Komplement von L_1 ist, folgt nun, dass L_2 ebenfalls nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 24 (5 Punkte)

$L_1 = \{\langle M \rangle | M \text{ hält für endlich viele Eingaben}\}$

S sei die Menge aller partiellen Funktionen, die nur auf endlich viele Eingaben definiert ist. Es gilt somit: $L(S) := \{\langle M \rangle | M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$. Somit ist die Funktion nicht entscheidbar.

$L_2 = \{\langle M \rangle | M \text{ hält für unendlich viele Eingaben}\}$

S sei die Menge aller partiellen Funktionen, die für unendlich viele Eingaben definiert ist. Es gilt somit: $L(S) := \{\langle M \rangle | M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$. Somit ist die Funktion nicht entscheidbar.