Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 5

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Übungsgruppe 4
Montag 16:00-18:00
Gunnar Schomaker

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Zeigen Sie: $L \subseteq \{0,1\}^*$ ist rekursiv aufzählbar und unendlich $\Leftrightarrow$ es gibt eine berechenbare Bijektion $g : \mathbb{N} \to L$.

„$\Rightarrow$": Wenn $L \subseteq \{0,1\}^*$ rekursiv aufzählbar und unendlich ist, so lässt sich jedem Element aus L genau eine natürliche Zahl zuordnen, so dass es eine berechenbare Biijektion $g : \mathbb{N} \to L$ gibt. Als Beispiel könnte man hier die in der Übung gezeigte aufsteigende Sortierung nennen, bei dem jedem Element aus L eine eindeutige Position zugeordnet wird.
„$\Leftarrow$": g ist eine totale, berechenbare, surjektive (da Bijektiv) Funktion, so dass sie nach der Definition des Begriffs „rekursiv aufzählbar" rekursiv aufzählbar ist. Da die Funktion jedem Element aus $\mathbb{N}$ einen Wert aus L zuordnet und $\mathbb{N}$ nicht beschränkt ist, ist die Sprache somit auch unendlich.

Aufgabe 18 (5 Punkte)

1. Wir ändern die Definition der Gödelnummer etwas ab. Statt die Gödelnummer durch
   $$\langle M \rangle = 111Code_1 11Code_2 11Code_3 ...11Code_g 111.$$
   zu definieren, benutzen wir die Definition
   $$\langle M \rangle = 111Code_1 11Code_2 11Code_3 ...11Code_g 1.$$
   D.h., die drei 1 am Ende werden durch eine 1 ersetzt. Alles andere bleibt gleich. Welche Probleme treten bei der Simulation einer DTM M auf einer universellen DTM auf?
   Die drei Einsen am Ende der ursprünglichen Definition der Gödelnummer stellen ein „Terminierungssignal" da, so dass der DTM hier das Ende der Zeichenfolge signalisiert wird. Durch die Änderung auf eine Eins, ist die Endfolge nicht mehr eindeutig, da Einsen auch im „laufenden Betrieb" als Trennzeichen zwischen Teilen eines Codes vorkommen.
2. Im Skript wird angedeutet, dass sich eine universelle DTM M_0 die Zustände einer von ihr simulierten DTM nicht in Zuständen merken kann. Begründen Sie, warum nicht?
   Wenn die universelle DTM die Zustände einer von ihr simulierten DTM in Zuständen speichern würde, so müssten unendlich viele Zustände vorhanden sein, damit sich Turing-Maschinen mit beliebig vielen Zuständen simulieren lassen.

Aufgabe 19 (5 Punkte)

Sind folgende Mengen rekursiv aufzählbar?

a) $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält für mindestens eine Eingabe}\}$

b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält für genau zwei Eingaben}\}$

Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort

Eine Sprache L ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn L endlich ist oder es eine DTM gibt, die eine total berechenbare surjektive Funktion $g : \{0,1\}^* \to L$ berechnet.

Zu a)

$L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält für mindestens eine Eingabe}\}$

Die Inhalte des Bandes der Turingmaschine M werden als Eingabe der Turingmaschine M' aufgefasst, bei der das Band leer ist. Die sonstigen Eigenschaften sind bei M und M' gleich. M' lässt sich nun auf H_0 reduzieren, so dass gilt $M' \le H_0$. Da H_0 gemäß Skript rekursiv aufzählbar ist, ist nun M' auch rekursiv aufzählbar.

Zu b)

Da die Übung Probleme dieser Aufgabenklasse nicht ausreichend besprochen hat und die Vertretung selber Probleme mit diesen Aufgabentypen hatte, konnten wir diese Aufgabe nicht bearbeiten.

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Sei folgende Sprache gegeben.

$$L_3 := \left\{ \langle M \rangle a \,\middle|\, \begin{array}{l} M \text{ gestartet auf dem leeren Band schreibt} \\ \text{irgendwann einmal den Buchstaben } a \text{ auf das Band} \end{array} \right\}$$

a) Zeigen Sie: Wenn eine DTM M L_3 entscheidet, dann kann mit Hilfe von M eine DTM angegeben werden, die das Halteproblem entscheidet.

L_3 lässt sich auf das Halteproblem bei leerem Band H_0 reduzieren, welches sich, wie in der Vorlesung gezeigt, auf H reduzieren lässt.

Es gilt somit $H_0 \le L_3$:

1. Sofern in $\langle M \rangle \in H_0$ bereits der Buchstabe a als Ausgabe vorkommt, so wird dieses durch ein noch nicht benutztes Zeichen ersetzt.
2. Statt des Haltevorgangs beim Halteproblem $\langle M \rangle$ wird in $\langle M' \rangle \in L_3$ ein a auf das Band geschrieben.

$$f(w) = \begin{cases} w, & w \text{ ist in der Form } \langle \mathrm{M} \rangle \\ \langle M' \rangle, & \text{wenn } w = \langle M \rangle \end{cases}$$

b) Folgern Sie daraus, dass L_3 nicht entscheidbar sein kann!

Da das Halteproblem, wie in der Vorlesung gezeigt, nicht entscheidbar ist, würde eine DTM, die L_3 entscheidet somit ein Problem lösen, das nicht lösbar ist. Durch diesen Widerspruch folgt nun, dass L_3 nicht entscheidbar ist.