Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und Formale Sprachen: Blatt 2

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)

Übungsgruppe 4
Montag 16:00-18:00
Gunnar Schomaker

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Beschreiben Sie formal eine 1-Band DTM, die die Eingabe $x\#y$ mit $x, y \in \{0,1\}^*$ in $y\#x$ überführt. Untersuchen Sie, wie viel Zeit und Platz Ihre Maschine dabei in Abhängigkeit von $|x\#y|$ benötigt (im Groß-O Kalkül).

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_5\} \cup (\{q_4\} \times \Sigma)$

$\Sigma = \{0,1,\#\}$

$\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$

$F = \{q_5\}$

Die Übergangsfunktion δ wird durch folgende Tabelle beschrieben:

δ	0	1	B	#
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	-	$(q_1, \#, R)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$	$(q_1, \#, R)$
q_2	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$	(q_3, B, R)	$(q_2, \#, L)$
q_3	$([q_4, a], a, R)$, $\forall a \in \Sigma$	$([q_4, a], a, R)$, $\forall a \in \Sigma$	-	(q_5, B, L)
$[q_4, a]$, $\forall a \in \Sigma$	$([q_4, a], 0, R)$, $\forall a \in \Sigma$	$([q_4, a], 1, R)$, $\forall a \in \Sigma$	(q_2, a, L), $\forall a \in \Sigma$	$([q_4, a], \#, R)$, $\forall a \in \Sigma$
q_5	-	-	-	-

In den ersten beiden Zuständen läuft der Zeiger bis zum rechten Rand der Zeichenfolge und überschreibt das erste Blank-Zeichen durch „#“. In der nächsten Reihe (q_3) läuft der Zeiger nun wieder zum Anfang, um sich dann durch q_3 das Anfangszeichen zu merken. Sollte dieses Anfangszeichen das Trennelement „#“ sein, so wird dieses Element mit dem Blanksymbol überschrieben und die Turingmaschine wechselt in den Endzustand, da der Algorithmus zu diesem Zeitpunkt fertig ist. Andernfalls durchläuft der Zeiger das Band bis zum ersten kommenden Blanksymbol nach der Zeichenkette und überschreibt dieses Symbol mit dem gemerkten erstem Symbol und kehrt dann wieder zum Anfang der Zeichenkette zurück.

Laufzeitanalyse:
Das erstmalige Durchlaufen der Zeichnkette benötigt im worst-case (Zeiger steht ganz am Anfang der Zeichenkette) die Zeit $O(|x\#y|)$.

Nun durchläuft der Algorithmus die Zeichenkette $|x|$ mal, da jeder die Zeichen des Wortes x am Anfang gelöscht und am Ende eingefügt werden müssen. Jeder Durchlauf (von hinten nach vorne und anschließend wieder nach hinten) dauert dabei $2 \cdot |x\#y|$. Somit benötigt die

Schleife insgesamt die Zeit $|x| \cdot 2 \cdot |x\#y|$. Da gemäß der Aufgabenstelle die Zeit in Abhängigkeit von $|x\#y|$ ausgedrückt werden soll und $|x| \le |x\#y|$, folgt somit $O\left(|x\#y|^2\right)$.

Die Gesamtlaufzeit beträgt somit $O\left(|x\#y|\right)+O\left(|x\#y|^2\right)$. Da $O\left(|x\#y|\right) \le O\left(|x\#y|^2\right)$ kann man dies zu $O\left(|x\#y|^2\right)$ vereinfachen.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben Sie die folgende 1-Band-DTM $M = \{Q, \Sigma, \delta, \Gamma, q_0, F\}$ mit $Q = \{q_0, ..., q_8\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,B\}$ und $F = \{q_8\}$ sowie der Übergangsfunktion

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 0, R)$	$-$	$-$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$-$
q_2	$-$	$(q_2, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_3	$-$	(q_4, B, L)	$-$
q_4	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, 1, L)$	(q_5, B, R)
q_5	(q_6, B, R)	$(q_8, 1, L)$	(q_8, B, R)
q_6	$(q_7, 0, R)$	$(q_7, 1, R)$	(q_8, B, R)
q_7	$(q_7, 0, R)$	$(q_7, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_8	$-$	$-$	$-$

Welche Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ wird von M akzeptiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Turingmaschine akzeptiert die Sprache $0^i 1^j$ mit $i, j \in \mathbb{N}; i \le j; i, j > 0$. Die Sprache muss mit einer 0 beginnen, da ansonsten bereits der Übergang von q_0 in einen anderen Zustand einen ungültigen Zustand provozieren würde. Nach der führenden 0 folgen nun weitere Nullen (Zustand q_1), bis eine 1 folgt. Durch die 1 wechselt die Turinmaschine in Zustand q_2, welcher solange andauert, bis die Turingmaschine auf ein Blanksymbol trifft, wodurch die Turingmaschine erst in den Zustand q_3 und dann in den Zustand q_4 wechselt, wobei die letzte 1 mit dem Blanksymbol überschrieben wird. Anschließend durchläuft die Turingmaschine das Band bis zum ersten Blanksymbol vor dem Wort der akzeptierten Sprache (Zustand q_4) um dann die Leserichtung abermals nach rechts zu wechseln (Zustand q_5). Folgt nun direkt eine 1 oder ein Blanksymbol, so bedeutet dies, dass es mehr oder gleich viele Einsen als Nullen gab und die Turingmaschine wechselt in den akzeptierten Endzustand q_8. Folgt hingegen eine 0, so wird diese mit einem Blanksymbol überschrieben und der Prozess beginnt von vorne.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde die formale Definition für eine 1-Band DTM gegeben (Satz 2.1). Diese sei im folgenden mit M_{MadH} bezeichnet. Im WS 2003/04 wurde von Prof. Blömer eine leicht abgewandelte Definition einer DTM eingeführt, die wir hier $M_{\mathrm{Blömer}}$ nennen.

Vergleichen Sie die beiden formalen Definitionen der Maschinen. Erläutern Sie wesentliche Unterschiede im formalen Aufbau, Arbeitsweise und Übergangsfunktion.

Bei $M_{\text{MadH}} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, F)$ handelt es sich um ein 6-Tupel, während 1-Band DTM $M_{\text{Blömer}} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$ durch ein 4-Tupel gegeben ist. $M_{\text{Blömer}}$ lässt somit in der unmittelbaren Definition den Startzustand q_0 und die Menge der Endzustände F weg, welche bei Professor Blömer in der Zustandsmenge Q durch s, q_{accept} und q_{reject} genauer angegeben werden. Dabei muss $q_{\text{accept}} \neq q_{\text{reject}}$ gelten. Bei M_{MadH} werden s und q_{accept} bereits im Tupel gegeben, während die nicht akzeptieren Endzustände q_{reject} bei M_{MadH} nicht genauer angegeben werden sondern indirekt in der Übergangsfunktion δ dargestellt werden.
Das Bandalphabet umfasst bei $M_{\text{Blömer}}$ neben dem Blanksymbol auch ein Startsymbol, welches bei M_{MadH} nicht vorkommt. Die Einschränkung, dass die Symbole L, R in Γ nicht vorkommen dürfen, fehlt bei M_{MadH} ebenso. Der Anfang des Bandes wird bei $M_{\text{Blömer}}$ durch ein Startsymbol gekennzeichnet, während M_{MadH} davon ausgeht, dass das Band prinzipiell in beiden Richtungen unendlich ist und an den Stellen, an denen kein Symbol der Eingabe steht, immer Blanksymbole stehen.
Bei der Übergangsfunktion dürfen bei $M_{\text{Blömer}}$ aus den akzeptierten Endzuständen q_{accept} sowie aus den nicht akzeptieren Endzuständen q_{reject} keine weiteren Übergänge mehr aufgerufen werden, während dieses bei M_{MadH} erlaubt ist. $M_{\text{Blömer}}$ kennt darüber hinaus nicht die „neutrale Bewegung", bei der der Zeiger der Turingmaschine an der gleichen Stelle bleibt, sondern erwartet zwingend eine Bewegung des Zeigers nach rechts oder links.

Zeigen Sie, dass beide Definitionen die gleiche Klasse von Problemen lösen, indem Sie die Simulation der DTM M_{MadH} durch die DTM $M_{\text{Blömer}}$ darstellen.

$M_{\text{MadH}} = (Q_{\text{MadH}}, \Sigma_{\text{MadH}}, \Gamma_{\text{MadH}}, \delta_{\text{MadH}}, q_o, F)$

$M_{\text{Blömer}} = (Q_{\text{Blömer}}, \Sigma_{\text{Blömer}}, \Gamma_{\text{Blömer}}, \delta_{\text{Blömer}})$

$Q_{\text{Blömer}} = Q_{\text{MadH}}$ mit $s = q_0$, $q_{\text{accept}} = F$, q_{reject} wird später bei $\delta_{\text{Blömer}}$ näher erläutert.

$\Sigma_{\text{Blömer}} = \Sigma_{\text{MadH}}$

$\Gamma_{\text{Blömer}} = \Gamma_{\text{MadH}} \cup \{\triangleright\}$

$\delta_{\text{Blömer}} = \delta_{\text{MadH}}$, wobei die Turingmaschine $M_{\text{Blömer}}$ bei allen Übergängen, die in δ_{MadH} nicht definiert sind, in den Zustand q_{reject} wechseln muss.

Da die Definition von $M_{\text{Blömer}}$ aussagt, dass es ein Startsymbol gibt und somit nur der rechte Teil des Bandes unendlich ist, während M_{MadH} davon ausgeht, dass beide Seiten unendlich sind, muss, damit die Übergangsfunktion δ_{MadH} ordnungsgemäß funktioniert, der Bandinhalt zu Beginn unendlich nach rechts verschoben werden, so dass auf beiden Seiten unendlich viel Platz ist. Eine mögliche Übergangsfunktion hierfür wäre eine Modifikation der in der Übung vorgestellten Schiebefunktion.
Da $M_{\text{Blömer}}$ außerdem die neutrale Bewegung nicht kennt, müssen die entsprechenden Übergänge so modifiziert werden, dass zuerst die Aktion stattfindet und anschließend eine Bewegung nach rechts erfolgt, die in einen komplett neuen Zustand führt, aus dem nun eine neutrale Aktion ausgeführt wird und der Zeiger wieder nach links wandert. Der Zustand nach diesen beiden Operationen soll der eigentlich gewünschte Folgezustand sein.

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Zeigen Sie nun die Rückrichtung, d.h. die Simulation von $M_{\text{Blömer}}$ durch M_{MadH}.

$M_{\text{Blömer}} = \left(Q_{\text{Blömer}}, \Sigma_{\text{Blömer}}, \Gamma_{\text{Blömer}}, \delta_{\text{Blömer}}\right)$

$Q_{\text{Blömer}}$ mit Startzustand s, Menge der akzeptierten Endzuständen q_{accept} und Menge der ungültigen Zustände q_{reject}.

$M_{\text{MadH}} = \left(Q_{\text{MadH}}, \Sigma_{\text{MadH}}, \Gamma_{\text{MadH}}, \delta_{\text{MadH}}, q_o, F\right)$

$Q_{\text{MadH}} = Q_{\text{Blömer}} \setminus \left\{q_{\text{reject}}\right\}$

$\Sigma_{\text{MadH}} = \Sigma_{\text{Blömer}}$

$\Gamma_{\text{MadH}} = \Gamma_{\text{Blömer}}$

$q_0 = s$

$F = q_{\text{accept}}$

$\delta_{\text{MadH}} = \delta_{\text{Blömer}}$, wobei die Turingmaschine M_{MadH} bei allen Übergängen, die in $\delta_{\text{Blömer}}$ in einen nicht akzeptierten Zustand, d.h. in ein Element aus q_{reject}, führen, bei δ_{MadH} nicht definiert sind und somit aus der Übergangsfunktion fallen. Des weiteren setzt $M_{\text{Blömer}}$ voraus, dass nur der rechte Bereich des Bandes unendlich ist und der linke Bereich durch ein Startzeichen abgeschlossen wird. Um dieses bei M_{MadH} zu gewährleisten, muss vor der eigentlichen Ausführung der Übergangsfunktion an den Anfang der Eingabefolge noch das Startelement geschrieben sowie der Zeiger auf das erste Symbol der Eingabefolge gesetzt werden.