13. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

MARTIN LOTZ & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 1 (Paderborner Allerlei).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen **Minuspunkt**. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Eine Teilmenge H einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn für alle $a \in G$ und $b \in H$ auch $ab \in H$ und $b^{-1} \in H$ gilt.
☐ Richtig ☒ Falsch

(ii) Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ist zyklisch. ☒ Richtig ☐ Falsch

(iii) Die Gruppe aller invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_3$ ist nicht kommutativ. ☒ Richtig ☐ Falsch

(iv) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\text{prob}\,(A \,|\, B)$ ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung der Ereignisse A und B dividiert durch die Wahrscheinlichkeit von B. ☐ Richtig ☒ Falsch

(v) Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Dann ist f eine diskrete Stammfunktion von Δf.
☒ Richtig ☐ Falsch

(vi) Seien a und b Polynome über $\mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dann gibt es Polynome q und r mit $a = qb - r$ und $\deg r < \deg b$. ☒ Richtig ☐ Falsch

(vii) Eine monotone, beschränkte Folge konvergiert. ☒ Richtig ☐ Falsch

(viii) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, deren Glieder a_n alle positiv sind und eine Nullfolge bilden, konvergiert. ☐ Richtig ☒ Falsch

(ix) Sei $\sqrt[n]{|a_n|}$ eine beschränkte, konvergente Folge, die nicht gegen Null konvergiert. Die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert, ist
☐ ein Quadrat ☒ eine endliche Kreisscheibe möglicherweise mit Lücken im Kreisrand ☐ eine Halbebene ☐ ganz $\mathbb{C}$ ☐ nichts davon

(x) $n^3 + 4n - 17 + (-1)^n \in$
☒ $\mathcal{O}(n^3)$ ☐ $\mathcal{O}(n^2)$ ☒ $\mathcal{O}(2^{n \log n})$ ☐ nichts davon

Aufgabe 2 (Zweifach Abzählen).

Zeige für $0 < i \leq j \leq n$

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i} = \binom{n}{j}\binom{j}{i}$$

durch zweifaches Abzählen von Paaren (I, J), wobei $I \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{i}$ und $J \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{j}$ sowie $I \subseteq J$ gilt.

Lösung. Für jedes j gibt es $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten, eine j-elementige Menge aus $\mathbb{N}_{<n}$ auszuwählen. Zu jedem solchen J und $i \leq j$ gibt es $\binom{j}{i}$ Teilmengen $I \subseteq J$ mit $\#I = i$. Zusammenfassend: Es gibt $\binom{n}{j}\binom{j}{i}$ Paare (I, J) mit $I \subseteq J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$ und $\#I = i, \#J = j$.

Umgekehrt: Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten, eine i-elementige Menge I aus $\mathbb{N}_{<n}$ zu wählen. Für jede solche Menge gibt es $\binom{n-i}{j-i}$ Möglichkeiten ein j-elementiges $J \subseteq N_{<n}$ zu finden mit $I \subseteq J$. Grund: Es geht um die J, für die i Elemente (nämlich die aus I) schon vorgegeben sind. Die Wahl von so einem J besteht aus der Auswahl von $j - i$ aus den verbleibenden $n - i$ Elementen in $\mathbb{N}_{<n}$.

In Formeln gefasst:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j}\binom{j}{i} &= \sum_{J \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{j}} \binom{j}{i} \\
&= \sum_{J \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{j}} \#\{I \mid I \subseteq J, \#I = i\} \\
&= \#\left\{(I, J) \;\middle|\; \begin{matrix} I \subseteq \mathbb{N}_{<n}, \#I = i \\ J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, \#J = j, \end{matrix} \; I \subseteq J\right\} \\
&= \sum_{I \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{i}} \#\{J \mid I \subseteq J, \#J = j\} \\
&= \sum_{I \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{i}} \binom{n-i}{j-i} \\
&= \binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. ○

Aufgabe 3 (In-/Exklusion).

Für eine Statistik wurde eine Anzahl Personen befragt. 33 gaben an ein eigenes Auto zu fahren, 29 besitzen einen Computer und 12 haben ein Handy. 20 der Autofahrer haben einen Computer und 10 haben ein Handy. 11 der Computerbesitzer haben auch ein Handy und 9 von diesen fahren ein eigenes Auto. Wieviele Personen haben wenigstens einen der drei Punkte angegeben?

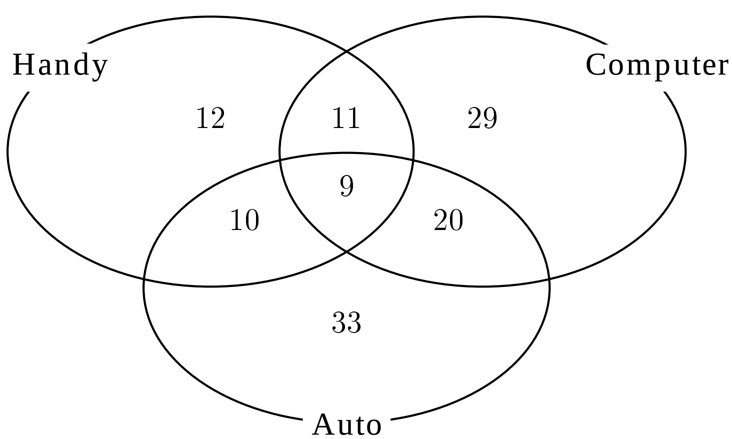
Lösung. Sei A_1 die Menge der Autobesitzer, A_2 die Menge der Computerbesitzer und A_3 die Menge derer, die ein Handy besitzen. Die Ergebnisse der Befragung lassen sich also folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \#A_1 = 33, \quad \#A_2 = 29, \quad \#A_3 = 12 \\ \#(A_1 \cap A_2) = 20, \quad \#(A_1 \cap A_3) = 10, \quad \#(A_2 \cap A_3) = 11 \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 9. \end{aligned}$$

Gesucht ist $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, also Anzahl der Befragten, die mindestens eines der drei Objekte besitzen. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion liefert die Antwort:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 33 + 29 + 12 - 20 - 10 - 11 + 9 = 42. \end{aligned}$$

Bildlich sieht das so aus:



○

Aufgabe 4 (Differenzen).

Bestimme die Differenz Δf für $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(n) = \binom{n}{2}$.

Lösung. $\Delta\binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = \binom{n}{1} = n.$ $\bigcirc$

(ii) $f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ für $n \neq 0, -1$ und $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

$\bigcirc$

(iii) $f(n) = n2^{n-1}$.

Lösung. Durch direktes Rechnen oder Produktregel gelangt man zum Ergebnis $\Delta(n2^{n-1}) = (n+2)2^{n-1}$. $\bigcirc$

(iv) $f(n) = n^2 4^{n+2} + n^{\underline{3}}$.

Lösung. Wir benutzen hier die Linearität des Δ Operators.

$$\begin{aligned}\Delta(n^2 4^{n+2} + n^{\underline{3}}) &= \Delta(n^2 4^{n+2}) + \Delta(n^{\underline{3}}) \\ &= (n+1)^2 4^{n+3} - n^2 4^{n+2} + (n+1)^{\underline{3}} - n^{\underline{3}} \\ &= 4^{n+2}(3n^2 + 8n + 4) + 3n(n-1).\end{aligned}$$

$\bigcirc$

(v) $f(n) = \frac{2^{n+2}}{n^2+1}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{2^{n+2}}{n^2+1}\right) &= 2^{n+2}\left(\frac{2}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}\right) \\ &= 2^{n+2}\left(\frac{n(n-2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}\right).\end{aligned}$$

$\bigcirc$

(vi) $f(n) = n!2^n$.

Lösung. $\Delta(n!2^n) = (n+1)!2^{n+1} - n!2^n = (2n+1)n!2^n$.

(vii) $f(n) = (n-3)4^{n^2}$.

Lösung. Hier kann die Produktregel angewandt werden:

$$\Delta(h \cdot g) = \Delta h \cdot Eg + h \cdot \Delta g.$$

Setze $g = n-3$ und $h = 4^{n^2}$. Dann gilt für die in der Produktregel auftretenden Größen:

$$Eg = n-2, \quad \Delta g = 1, \quad h = 4^{n^2}, \quad \Delta h = 4^{n^2}(4^{2n+1} - 1).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Delta((n-3)4^{n^2}) &= 4^{n^2}(4^{2n+1} - 1)(n-2) + 4^{n^2}\\ &= 4^{n^2}(4^{2n+1}(n-2) - n + 3).\end{aligned}$$

Lösung. Direkt lässt sich nachrechnen:

$$\begin{aligned}\Delta((n-3)4^{n^2}) &= (n-2)4^{n^2+2n+1} - (n-3)4^{n^2}\\ &= 4^{n^2}(4^{2n+1}(n-2) - n + 3).\end{aligned}$$

(viii) $f(n) = (n - 2^{-n})(n^2 2^n + 3)$.

Lösung. Hier können wir z.B. die Produktregel anwenden. Sei $g = n - 2^{-n}$ und $h = n^2 2^n + 3$, so dass $f = gh$. Wir bilden erstmal die Differenzen

$$\begin{aligned}\Delta g &= 1 + 2^{-(n+1)}\\ \Delta h &= 2^n(n^2 + 4n + 2).\end{aligned}$$

Aus der Produktregel $\Delta(h \cdot g) = \Delta h \cdot Eg + h \cdot \Delta g$ und mit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\Delta((n - 2^{-n})(n^2 2^n + 3)) &= 2^n(n^2 + 4n + 2)(n + 1 - 2^{-(n+1)})\\ &\quad + (n^2 2^n + 3)(1 + 2^{-(n+1)})\\ &= 2^n(n^3 + 5n^2 + 6n + 2) - (n^2/2 + 2n + 1)\\ &\quad + 2^n n^2 + n^2/2 + 3 + 2^{-n}\\ &= 2^n(n^3 + 6n^2 + 6n + 2) - (2n - 2) + 2^{-n}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Summation).

Sei $f(n) = \frac{(n+5)n}{4(n+1)(n+4)}$.

(i) Zeige $\Delta f(n) = \frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}$.

Lösung. Aus der Definition des Δ Operators folgt

$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= \frac{(n+6)(n+1)}{4(n+2)(n+5)} - \frac{(n+5)\,n}{4\,(n+1)\,(n+4)} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+4)(n+6) - n(n+5)^2(n+6)}{4(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}.\end{aligned}$$

Wir vereinfachen nun den Zähler etwas mehr:

$$\begin{aligned}(n+1)^2(n+4)(n+6) &= n^4 + 12n^3 + 45n^2 + 58n + 24, \\ n(n+5)^2(n+6) &= n^4 + 12n^3 + 45n^2 + 50n.\end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist $8n + 24$, woraus die gesuchte Formel folgt. ○

(ii) Berechne

$$\sum_{0 \le k < n} \frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)}.$$

Lösung. Wir wissen:

$$\frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)} = \Delta f(k) = f(n+1) - f(n).$$

Dadurch wird die Summe ganz einfach:

$$\sum_{0 \le k < n} \Delta f(k) = \sum_{0 \le k < n} f(k+1) - f(k) = f(n) - f(0) = \frac{(n+5)\,n}{4\,(n+1)\,(n+4)}.$$

○

(iii*) Zeige $\frac{2(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+4)(k+5)} = \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3(k+4)} - \frac{1}{3(k+2)} + \frac{1}{3(k+5)}$ und bestimme mit dieser Information nochmal

$$\sum_{0 \le k < n} \frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)}.$$

Lösung. Die geforderte Gleichung

$$g(k) := \frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)} = \frac{1}{3\,(k+1)} - \frac{1}{3\,(k+4)} - \frac{1}{3\,(k+2)} + \frac{1}{3\,(k+5)}$$

lässt sich durch bringen auf einen gemeinsamen Nenner und ausmultiplizieren leicht prüfen. Die gesuchte Summe lässt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned}
g(n) &= \frac{1}{3} \sum_{0 \le k \le n-1} \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+4} \right) - \frac{1}{3} \sum_{0 \le k < n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\sum_{0 \le k < n} \Delta \left(\frac{1}{k+4} \right) - \sum_{0 \le k < n} \Delta \left(\frac{1}{k+1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{3} \frac{4(n+1) - 4(n+4) + 3(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+4)} \\
&= \frac{(n+5)n}{4(n+1)(n+4)}.
\end{aligned}$$

Das ist wiederum $f(n)$. ○

Aufgabe 6 (Summation).

Bestimme die diskrete Stammfunktion s zu k^3+3k, also $s(n) = \sum_{0 \le k < n} (k^3+3k)$.

Lösung. Setze

$$f(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e,$$

mit noch zu bestimmenden a, b, c, d, e. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Delta f(n) &= a(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b(3n^2 + 3n + 1) + c(2n + 1) + d \\
&= 4an^3 + (6a + 3b)n^2 + (4a + 3b + 2c)n + (a + b + c + d).
\end{aligned}$$

Durch die Forderung $\Delta f(k) = k^3 + 3k$ erhalten wir ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
4a &= 1 \\
6a + 3b &= 0 \\
4a + 3b + 2c &= 3 \\
a + b + c + d &= 0.
\end{aligned}$$

Als Lösung erweist sich

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{7}{4}, \quad d = -\frac{3}{2}.$$

Die Zahl e darf beliebig sein. Als Lösung erhalten wir also:

$$f(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{7}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + e.$$

○

Aufgabe 7 (Differenzengleichung).

Löse die Differenzengleichung

$$\left(E^3 - 6E^2 + 11E - 6\right) f = 4, \qquad f(0) = 2, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0.$$

Tipp: Verwende den Ansatz $f_0(n) = an + b$ für die benötigte spezielle Lösung.

Zur Probe: Es ergibt sich $f(9) = -1002$ und $f(-1) = 1$.

Lösung. Wir wollen die Lösung der Differenzengleichung als Summe einer allgemeinen Lösung der *homogenen* Gleichung

$$\left(E^3 - 6E^2 + 11E - 6\right) f = 0$$

und einer speziellen Lösung der in der Aufgabe angegebenen *inhomogenen* Gleichung beschreiben. Für die homogene Gleichung betrachten wir die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung hat die Wurzeln 1, 2 und 3. Daraus ergibt sich die allgemeine Form der Lösung für die homogene Gleichung:

$$f_h(n) = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n.$$

Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nehmen wir als Ansatz $f_0(n) = an + b$. Daraus ergibt sich

$$E^3(an+b) - 6E^2(an+b) + 11E(an+b) - 6(an+b) = 2a \stackrel{!}{=} 4.$$

Da $2a = 4$ gelten muss, ist $a = 2$ und b können wir beliebig wählen (z.B. b=0). Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist demnach

$$f_0(n) = 2n.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir nun indem wir die Parameter A_1, A_2 und A_3 so anpassen, dass die Funktion

$$f(n) = f_h(n) + f_0(n) = A_1 + A_2 2^n + A_3 3^n + 2n$$

den Bedingungen $f(0) = f(1) = 2$ und $f(2) = 0$ genügt. Durch Lösen eines Gleichungssystems erhalten wir $A_1 = 4$, $A_2 = -2$ und $A_3 = 0$. Die gesuchte Funktion ist dann gegeben durch $f(n) = 2n + 4 - 2^{n+1}$. ○

Aufgabe 8 (Operatoren und Elemente).

Formuliere die Operatorgleichung

$$\Delta \circ M = M(\Delta, I) + M(I, \Delta) + M(\Delta, \Delta)$$

auf Elementebene, worin der Multiplikationsoperator M durch $M(f, g)(n) = f(n) \cdot g(n)$ definiert ist.

Lösung. Seien f, g gegeben. Für jedes n haben wir:

$$\begin{aligned}
(M(\Delta, I) &+ M(I, \Delta) + M(\Delta, \Delta))(f, g)(n) \\
&= M(\Delta, I)(f, g)(n) + M(I, \Delta)(f, g)(n) + M(\Delta, \Delta)(f, g)(n) \\
&= \Delta f(n) I g(n) + I f(n) \Delta g(n) + \Delta f(n) \Delta g(n) \\
&= (f(n+1) - f(n)) g(n) + f(n)(g(n+1) - g(n)) \\
&\quad + (f(n+1) - f(n))(g(n+1) - g(n)) \\
&= f(n+1) g(n+1) - f(n) g(n) \\
&= \Delta(f \cdot g) = \Delta \circ M(f, g)(n).
\end{aligned}$$

Dies ist gleichzeitig eine Verifikation der Identität. Die Gleichung auf Elementebene lässt sich daraus ablesen. ○

Aufgabe 9 (Krankheit).

An einer bestimmten Krankheit erkranken 2% einer Bevölkerungsgruppe. Um ein rechtzeitiges Erkennen der Krankheit zu ermöglichen, wird ein Test entwickelt, mit dem man folgende Erfahrungen macht: Der Test zeigt einen positven Befund in 95% der Fälle, in denen die Person wirklich erkrankt ist. Er zeigt aber auch einen positiven Befund in 10% der Fälle, in denen die Person tatsächlich nicht erkrankt ist.

(i) Es wird nun eine Person getestet, der Befund ist positiv. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person erkrankt?

Lösung. Sei A das Ereignis, dass die Testperson krank ist und $\overline{A}$ das Ereignis, dass die Person gesund ist. Sei weiter B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt. Dann ist die Situation folgende:

$$P_A(B) = 0,95, \quad P_{\overline{A}}(B) = 0,10, \quad P(A) = 0,02.$$

Gesucht ist $P_B(A)$. Nach der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten ist

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Wier haben

$$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(B \cap A) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) + P(A)P_A(B) = 0,117,$$
$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = 0,019.$$

Also ist das Ergebnis

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,019}{0,117} \approx 0,16$$

○

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank, obwohl der Befund negativ ist?

Lösung. Gesucht ist $P_{\overline{B}}(A)$, wobei $\overline{B}$ das Ereignis, dass der Befund negativ ist, bedeutet. Wieder ist

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

Es bleibt also die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap \overline{B})$ zu ermitteln. Diese ist gegeben durch

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \approx 0,001.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P_{\overline{B}}(A) \approx \frac{0,001}{0,883} \approx 0,001132502831.$$

○

Aufgabe 10 (Gruppen).

Wir betrachten Teilmengen der symmetrischen Gruppe S_3 auf drei Elementen $\{1, 2, 3\}$.

(i) Ist $H = \{(), (12), (23)\}$ eine Untergruppe? Begründe Deine Antwort.

Lösung. H ist keine Untergruppe, da H nicht unter Multiplikation abgeschlossen ist. Wir haben nämlich $(12)(23) = (123) \notin H$. ◯

(ii) Ist $H = \{(), (12)\}$ ein Normalteiler? Begründe Deine Antwort.

Lösung. Nein, H ist kein Normalteiler. Wäre H ein Normalteiler, so müsste nach Definition für jedes $\sigma \in S_3$ gelten: $\sigma H = H\sigma$. Wir haben aber $(123)(12) = (13)$ und $(12)(123) = (23)$. Man stelle sich dazu ein Dreieck in der Ebene vor, deren Ecken mit $1, 2, 3$ nummeriert sind. Das Element (12) vertauscht Ecken 1 und 2, wärend (123) für eine Drehung im Uhrzeigersinn steht. Warnung: Im allgemein gilt *nicht* dass S_n Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks ist. ◯

(iii) Beweise, dass $H = \{(), (123), (132)\}$ ein Untergruppe ist.

Lösung. Dazu überprüfen wir:

$$(123)(123) = (132), (132)(132) = (123), (123)(132) = (132)(123) = ().$$

Im oben genannten Beispiel mit dem Dreieck, entspricht H der Gruppe der Drehungen. ◯

(iv) Ist $H = \{(), (123), (132)\}$ ein Normalteiler? Begründe Deine Antwort.

Lösung. Ja. Dazu berechnen wir die Nebenklassen mit Elementen die nicht in H liegen (d.h., (12), (13) und (23)):

$$(12)H = \{(12), (23), (13)\} = (13)H = (23)H$$
$$H(12) = \{(12), (13), (23)\} = H(13) = H(23).$$

Die Tatsache, dass Linksnebenklassen (und auch Rechtsnebenklassen) entweder gleich oder disjunkt sind, erleichtert die Rechnung. ◯

Aufgabe 11 (Gruppen).

Betrachte die drei Gruppen

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \qquad \mathbb{Z}_{21}^\times, \qquad A_4.$$

(i) Bestimme jeweils die Ordung aller zwölf Elemente.

Lösung. Als erstes schreiben wir die Elemente hin:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 &= \{(i,j) \,|\, 0 \le i < 2, 0 \le 1 < 6\} \\
\mathbb{Z}_{21}^\times &= \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\} \\
A_4 &= \left\{ \begin{array}{l} (),(123),(132),(124),(142),(134),(143) \\ (234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Nun können wir die Ordnungen der Elemente in einer Tabelle darstellen. Wir beginnen mit A_4. In der ersten Reihe steht jeweils die Nummer des Elementes in der oben aufgelisteten Reihenfolge.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_4	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2

Für $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_{21}^\times$ haben wir die Ordnungen:

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{21}^\times$	ord
$(0,0)$	1	1
$(0,1)$	2	6
$(0,2)$	4	3
$(0,3)$	8	2
$(0,4)$	16	3
$(0,5)$	10	6
$(1,0)$	13	2
$(1,1)$	5	6
$(1,2)$	11	6
$(1,3)$	20	2
$(1,4)$	19	6
$(1,5)$	17	6

○

(ii) Beweise, dass $\mathbb{Z}_{21}^\times$ nicht zyklisch ist.

Lösung. Die Gruppe $\mathbb{Z}_{21}^\times$ ist nicht zyklisch, da kein Element die Ordnung 12 hat. ○

(iii) Beweise, dass A_4 nicht kommutativ ist.

Lösung. Wir haben $(123)(12)(34) = (13)(34) = (134)$ aber $(12)(34)(123) = (34)(12)(123) = (34)(23) = (243)$, also ist A_4 nicht kommutativ. ◯

(iv) Entscheide, welche Gruppen isomorph sind und welche nicht. Begründe Deine Antwort und gib gegebenenfalls einen Isomorphismus an.

Lösung. Die Gruppe A_4 ist zu keiner der anderen beiden Isomorph, da die anderen kommutativ sind und A_4 nicht. Die anderen Gruppen haben die gleiche Gradstatistik, was die Vermutung nahe legt, dass diese isomorph sein könnten. Tatsächlich haben wir einen Isomorphismus. Der Chinesische Restsatz liefert einen Isomorphismus

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{21}^\times & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_7^\times, \\ a & \longmapsto & (a \bmod 3, a \bmod 7) \end{array} .$$

Weiter haben wir einen Isomorphismus

$$g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_7^\times, \\ (i,j) & \longmapsto & (2^i, 3^j) \end{array} ,$$

wobei die erste Gruppe additiv, die zweite multiplikativ zu verstehen ist. Die Zusammensetzung $g^{-1} \circ f$ liefert einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_{21}^\times \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. ◯

Lösung. Die Gruppe A_4 ist zu keiner der anderen beiden Isomorph, da die anderen kommutativ sind und A_4 nicht. Die anderen Gruppen haben die gleiche Gradstatistik, was eine Isomorphie vermuten lässt. Dies lässt sich durch Aufstellen einer Multiplikationstabelle überprüfen. Explizit ist die in Teil (i) angegebene Zuordnung ein Isomorphismus. ◯

Aufgabe 12 (Polynomdivision und ggT).

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler g der Polynome

$$a = x^6 + 7\,x^5 - x^4 - 23\,x^3 - x^2 + 26\,x + 9,$$
$$b = x^5 + 6\,x^4 - 7\,x^3 - 17\,x^2 + 8\,x + 9$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und stelle g in der Form $sa + tb$ dar.

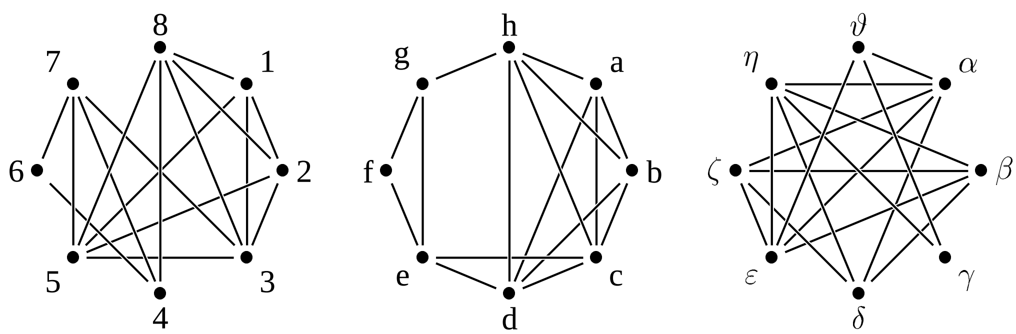
Lösung.

i	r_i	q_i	s_i	t_i
0	$x^6+7x^5-x^4-23x^3-x^2+26x+9$		1	0
1	$x^5+6x^4-7x^3-17x^2+8x+9$	$x+1$	0	1
2	x^3+8x^2+9x	x^2-2x	1	$-x-1$
3	x^2+8x+9	x	$-x^2+2x$	x^3-x^2-2x+1
4	0		x^3-2x^2+1	$-x^4+x^3+2x^2-2x-1$

Wir erhalten als den ggT $x^2+8x+9=(-x^2+2x)\cdot(x^6+7x^5-x^4-23x^3-x^2+26x+9)+(x^3-x^2-2x+1)\cdot(x^5+6x^4-7x^3-17x^2+8x+9)$. $\bigcirc$

Aufgabe 13 (Graphen).

Betrachte die folgende drei Graphen:



(i) Gib die Inzidenzmatrix des linken Graphen an.

Lösung. Bis auf Reihenfolge der Spalten ist

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}$$

$\bigcirc$

(ii) Gib eine Adjazenzmatrix des mittleren Graphen an.

Lösung.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bigcirc$

(iii) Stelle fest, ob der rechte Graph einen Hamiltonkreis besitzt und begründe Deine Antwort.

Lösung. Ja, er hat einen, zum Beispiel $\alpha\zeta\varepsilon\beta\delta\eta\gamma\vartheta$. $\bigcirc$

(iv) Beweise, dass der linke Graph keine 4-Färbung besitzt.

Lösung. Die Ecken $1, 2, 3, 5, 8$ bilden einen K_5. Bereits dafür sind fünf Farben notwendig. $\bigcirc$

(v) Beweise, dass der mittlere Graph nicht planar ist.

Lösung. Die Ecken a,b,c,d,h bilden einen K_5, der nicht planar ist. $\bigcirc$

(vi) Finde eine 3-Färbung für den rechten Graphen mit den Farben R(rot), G(grün) und B(blau).

Lösung. Die Zuordnung

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \\ R & R & R & B & B & G & G & G \end{array}$$

ist eine 3-Färbung. $\bigcirc$

(vii) Zwei der Graphen sind isomorph, aber nicht alle drei. Welche zwei Graphen sind isomorph?

- Begründe Deine Antwort anhand von Eigenschaften der Graphen.

  Lösung. Da der linke und auch der mittlere Graph nicht einmal eine 4-Färbung haben, können sie nicht zum rechten 3-färbbaren isomorph sein. Der linke und der mittlere Graph müssen isomorph sein. $\bigcirc$

- Gib einen Isomorphismus an.

  Lösung. Die Zuordnung

  $$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & g & d & f & e & h \end{array}$$

  ist ein Isomorphismus. ◯

Aufgabe 14 (Folgen).

(i) Ist die Folge $a = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>17}}$ monoton? Beweise Deine Antwort.

Lösung. Die Folge ist monoton fallend. Betrachte dazu den Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \\ &= \frac{(n+1)(n^2+1)}{n((n+1)^2+1)} \\ &= \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} \\ &= 1 - \frac{n^2+n-1}{n^3+2n^2+2n}. \end{aligned}$$

Der Term der von der Eins abgezogen wird ist für $n > 17$ (sogar für $n \geq 1$) immer positiv, also ist der Quotient a_{n+1}/a_n kleiner als Eins und die Folge monoton fallend. ◯

(ii) Bestimme das Infimum der Folge a.

Lösung. Die Folge ist immer positiv, also ist das Infimum mindestens Null. Andereseits gilt

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

so dass die Folge beliebig nah an die Null kommt. Daraus schließen wir, dass das Infimum Null ist. ◯

(iii) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{(2n+1)(n+4)}$.

Lösung. Der Grenzwert ist $1/2$. Denn:

$$\frac{n^2+2}{(2n+1)(n+4)} = \frac{n^2+2}{2n^2+9n+4} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{9}{n}+\frac{4}{n^2}}.$$

Wegen den Eigenschaften des Limes in Bezug auf Addition und Division sieht man, dass dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen $1/2$ konvergiert. ◯

Aufgabe 15 (Reihen).

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren, und beweise Deine Antwort.

(i) $\displaystyle\sum_{d=13}^{\infty} \frac{d^2 + 2^d}{3^{d^2}}$.

Lösung. Konvergiert, Quotientenkriterium. ◯

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{(2n+1)(n+4)}$.

Lösung. Divergiert, keine Nullfolge. ◯

(iii) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2}$.

Lösung. Konvergiert, Majorante $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2}$. ◯

(iv) $\displaystyle\sum_{t=10}^{\infty} \frac{(-1)^t}{\sqrt{t}\log_2 \log_2(t)}$.

Lösung. Konvergiert, Leibnizkriterium. ◯

Aufgabe 16 (Potenzreihen).

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}$.

Lösung. Wegen $(2n+1)! > n^n$ ist $0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} \leq \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, also ist der Konvergenzradius unendlich. ◯

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(\log\log k)^k} \cdot z^k$.

Lösung. Hier ist $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\log\log k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log\log k} = 1 \cdot 0 = 0$, also ist der Konvergenzradius unendlich. $\bigcirc$

(iii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^j j!} \cdot z^j$.

Lösung. Hier ist

$$(2j)! = (2j)^{\underline{j}} j! \geq (j+1)^j j! \geq (2j)^{j/2} j!,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Beobachtung $j+1 \geq \sqrt{2j}$ folgt. Daraus folgt $\frac{(2j)!}{2^j j!} \geq j^{j/2}$. Somit ist $\sqrt[j]{\frac{(2j)!}{2^j j!}}$ unbeschränkt und der Konvergenzradius 0. $\bigcirc$

Aufgabe 17 (Ableitungen).

Betrachte die Funktion

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x^4+x+1} \end{array}.$$

(i) Bestimme die Ableitung $f'(x)$.

Lösung. Hier lässt sich Quotientenregel, oder auch Produktregel zusammen mit Kettenregel anwenden. Das Ergebnis ist:

$$f'(x) = \frac{1-3x^4}{(x^4+x+1)^2}.$$

$\bigcirc$

(ii) Bestimme das Maximum der Funktion f.

Lösung. Wenn die Funktion ein Maximum besitzt, ist die Ableitung an dieser Stelle gleich Null. Die Ableitung ist gleich Null, wenn die Gleichung $1-3x^4 = 0$ erfüllt ist. Es gibt also zwei mögliche Kandidaten für lokale Extrema: $x = -1/\sqrt[4]{3}$ und $x = 1/\sqrt[4]{3}$. Wir setzen

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

und behaupten, die Funktion f hat bei x_0 ein Maximum. Um das zu begründen, wollen wir zuerst zeigen dass $f(x_0)$ ein *lokales* Maximum ist. Eine Möglichkeit besteht darin, die zweite Ableitung zu berechnen und zu prüfen ob $f''(x_0) < 0$ gilt. Eine in unserer Situation einfachere Möglichkeit folgt aus der Beobachtung, dass für ein kleines positives ε, $f'(x_0 + \varepsilon) < 0$ und $f'(x_0 - \varepsilon) > 0$ gilt. Das beduetet: Kurz vor x_0 steigt die Funktion noch, danach fällt sie erst mal. Analog sieht man übrigens auch, dass $-x_0$ ein lokales Minimum ist.

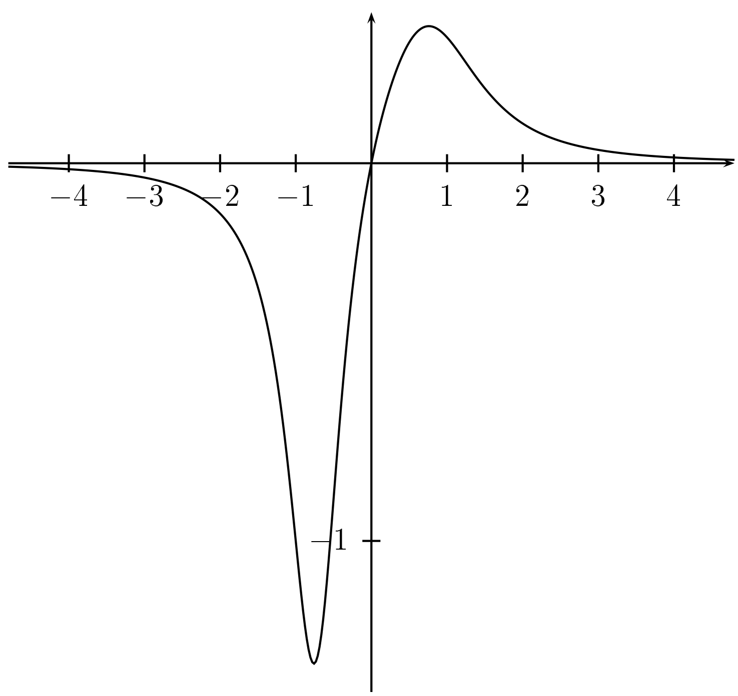
Da wir nun wissen dass f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum besitzt, müssen wir nur noch zeigen dass diese Maximum auch global ist, d.h. die Funktion nie den Wert $f(x_0)$ übersteigt. Dazu stellen wir fest:

- Für $x < 0$ gilt $f(x) < 0$.
- Für $0 \leq x \leq x_0$ ist f monoton steigend (da hier $f'(x) > 0$).
- Für $x > x_0$ ist f monoton fallend.

Also ist $f(x_0)$ auch ein globales Maximum. ○

(iii) Skizziere f.

Lösung. Mit den eben angestellten Beobachtungen und der weiteren Beobachtung, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ lässt sich schon ein relativ genaues Bild von f skizzieren.



○

(iv) Zu $x_0 = 0$ ist $f'(0) = 1$. Finde zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ein passendes $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 1\right| < \varepsilon$$

gilt.

Lösung. In unserem Zusammenhang ist die Frage äquivalent dazu, ein δ zu finden so dass für alle x mit $|x| < \delta$ gilt:

$$\frac{99}{100} = 1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < 1 + \varepsilon = \frac{101}{100}.$$

Weiter haben wir

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^4 + x + 1}.$$

Daraus errechnet man leicht dass $\delta = 1/100$ eine Lösung darstellt. ○

(v) Zeige explizit, dass der Differenzenquotient bei $x_0 = 0$ gegen 1 konvergiert.

Lösung. Wie bereits festgestellt, ist der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 0$ gegeben durch

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^4 + x + 1}.$$

Aus dieser Darstellung wird sofort ersichtlich, dass der Quotient für $x \to \infty$ gegen Eins konvergiert. ○