10. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

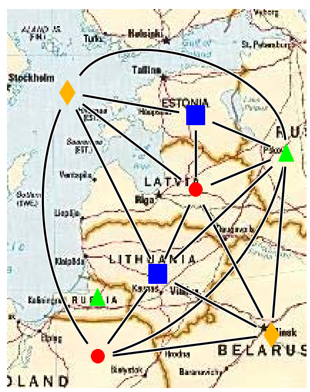
MARTIN LOTZ & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 10.1 (Baltikum). (5 Punkte)

Betrachte die baltischen Staaten und deren Umgebung. (Auf der Webseite findet sich die Karte in einer höheren Auflösung.)

(i) Betrachte auch die Ostsee als eine Region und bestimme den zugehörigen Graphen B. [Beachte, dass die Region um Kaliningrad (früher Königsberg) ein Teil von Russland ist.]

Lösung. Der Graph B besteht aus den sieben Punkten Ru=Russland, Le=Lettland, Li=Litauen, Es=Estland, Po=Polen, We=Weißrussland und Os=Ostsee sowie den sechzehn Kanten $\{\text{Li}, \text{Os}\}$, $\{\text{Po}, \text{Os}\}$, $\{\text{Ru}, \text{Es}\}$, $\{\text{Ru}, \text{Po}\}$, $\{\text{Ru}, \text{We}\}$, $\{\text{Ru}, \text{Le}\}$, $\{\text{Ru}, \text{Os}\}$, $\{\text{Li}, \text{Le}\}$, $\{\text{Po}, \text{Li}\}$, $\{\text{Po}, \text{We}\}$, $\{\text{Le}, \text{We}\}$, $\{\text{Le}, \text{Os}\}$, $\{\text{Le}, \text{Es}\}$, $\{\text{Es}, \text{Os}\}$, $\{\text{We}, \text{Li}\}$, $\{\text{Ru}, \text{Li}\}$.



(ii) Ist dieser Graph planar?

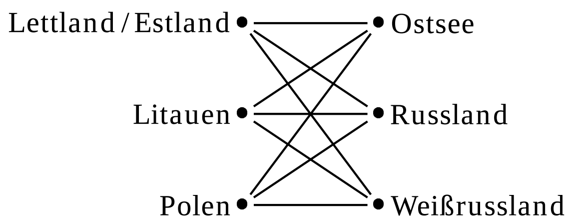
Lösung. Nein, denn er hat zu viele Kanten, nämlich $\#K = 16$. Er dürfte höchstens $3\#E - 6 = 3 \cdot 7 - 6 = 15$ Kanten haben, wenn er planar wäre.

(iii) Ist dieser Graph 4-färbbar? Falls ja, wie?

Lösung. Ja, der Graph ist 4-färbbar. Eine solche Färbung ist in (i) zu sehen.

(iv) Kann dieser Graph auf einen $K_{3,3}$ oder einen K_5 zusammengezogen werden? Falls ja, wie? [Zusammenziehen bedeute hier, dass wiederholt Kanten oder Punkte gelöscht oder Kanten zu einem Punkt zusammengezogen werden dürfen.]

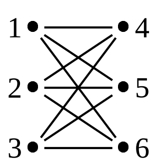
Lösung. Ja, der Graph kann auf einen $K_{3,3}$ zusammengezogen werden:



Dazu wurde die Kante $\{\text{Le}, \text{Es}\}$ zusammengezogen (und dabei entstehende doppelte Kanten durch eine ersetzt) und die Kanten $\{\text{Le}, \text{Li}\}$, $\{\text{Li}, \text{Po}\}$, $\{\text{Os}, \text{Ru}\}$ und $\{\text{Ru}, \text{We}\}$ weggelassen. ○

Aufgabe 10.2 ($K_{3,3}$). (5 Punkte)

Hier soll gezeigt werden, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist. Bearbeite dazu folgende Schritte:



(i) Der Graph $K_{3,3}$ enthält kein Dreieck (= Kreis mit drei Punkten).

Lösung. Der Graph $K_{3,3}$ enthält kein Dreieck, da keine Ecke zwei Nachbarn hat, die untereinander benachbart sind. Dies lässt sich durch Inspektion des Graphen $K_{3,3}$ überprüfen.

○

(ii) In der Darstellung eines planaren Graphen ohne Dreieck hat jede Facette wenigstens *vier* Kanten.

Lösung. Die an eine Facetten angrenzenden Kanten bilden einen Kreis. Und da es hier keinen Kreis mit drei Kanten gibt, muss dieser wenigstens vier Kanten lang sein. ○

(iii) Ein einfacher, planarer Graph ohne Dreieck hat höchstens $2\#E - 4$ Kanten.

Lösung. Sei E die Eckenmenge, K die Kantenmenge und F die Menge der Facetten des Graphen. Aus der Vorlesung ist die Eulersche Formel

$$\#E - \#K + \#F = 2$$

bekannt. Nun hat in unserem Fall jede Facette mindestens vier Kanten, und jede Kante liegt an höchstens zwei Facetten. Wir verwenden zweifaches Abzählen:

$$\begin{aligned}\#\{(k,f) \in K \times F \mid k \subset f\} &= \sum_{k \in K} \underbrace{\#\{f \in F \mid k \subset f\}}_{\leq 2} \leq 2\#K \\ &= \sum_{f \in F} \underbrace{\#\{k \in K \mid k \subset f\}}_{\geq 4} \geq 4\#F,\end{aligned}$$

also $4\#F \le 2\#K$. Setzen wir $\#F = 2 + \#K - \#E$ ein und lösen nach $\#K$ auf, erhalten wir

$$\#K \le 2\#E - 4. \qquad \bigcirc$$

(iv) Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

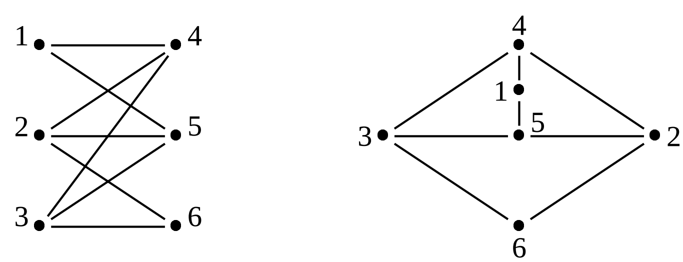
Lösung. Wäre $K_{3,3}$ planar, so müsste nach dem, was eben gezeigt wurde, $\#K \le 2\#E - 4$ gelten. Nun hat $K_{3,3}$ aber 9 Kanten und 6 Ecken. Wäre $K_{3,3}$ dürfte er also höchstens $2\#E - 4 = 8$ Kanten haben. Somit kann $K_{3,3}$ nicht planar sein. $\bigcirc$

Aufgabe 10.3 (Planar oder nicht?). (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Graphen planar sind:

(i) Der Graph G_1 entstehe aus $K_{3,3}$ durch Entfernen einer beliebigen Kante.

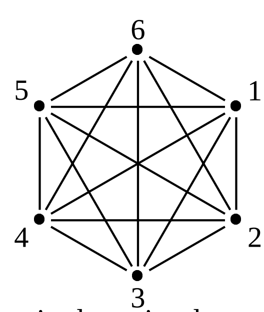
Lösung. Der Graph G_1 ist planar. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn wir dies nur für eine Kante nachweisen. Angenommen also, wir entfernen die Kante von 1 zu 6. Die Planarität kann dann an folgendem Bild abgelesen werden:



Beachte, dass hier $2\#E - 4 = \#K$ gilt, und somit die *notwendige* Bedingung aus der vorherigen Aufgabe erfüllt ist. $\bigcirc$

(ii) Ein Graph G_2 entstehe aus K_6 durch Entfernen zweier Kanten. [Der vollständige Graph K_6 auf 6 Punkten besteht aus sechs Punkten und allen 15 möglichen Kanten.]

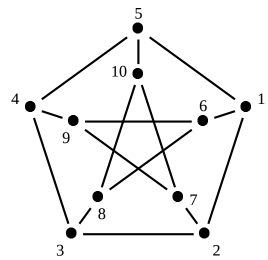
Lösung.



Aus der Vorlesung wissen wir, dass ein planarer Graph höchstens $3\#E - 6$ Kanten hat. Nach Entfernen zweier Kanten aus K_6 erhält man einen

Graphen mit 13 Kanten auf 6 Ecken, ein planarer Graph auf 6 Ecken darf aber höchstens $3 \cdot 6 - 6 = 12$ Kanten haben. Also ist G_2 nicht planar, egal welche Kanten aus K_6 entfernt wurden. $\bigcirc$

(iii) Der Graph G_3 sei folgender:

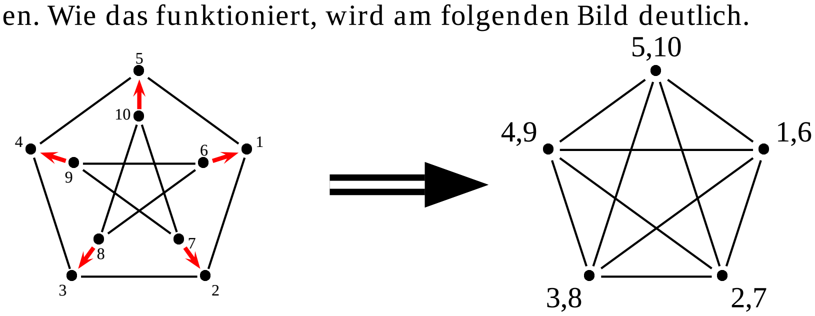


Lösung. Der sogenannte Petersen Graph ist nicht planar. Der Graph G_3, mit 10 Ecken und 15 Kanten, hat kein Dreieck, allerdings geht das Kriterium aus Aufgabe 10.2(iii) hier nicht, da $2\#E - 4 = 16 > 15 = \#K$. Aber G_3 hat auch kein Viereck, und analog zu Aufgabe 10.2(iii) zeigt man, dass für einen planaren Graph, in dem jede Facette mindestens 5 Kanten hat, die Ungleichung

$$3\#K \leq 5\#E - 10$$

gelten muss. In unserem Fall haben wir $3\#K = 45$ und $5\#E - 10 = 40$, also ist G_3 nicht planar. $\bigcirc$

Lösung. Der sogenannte Petersen Graph G_3 ist nicht planar, denn er hat einen K_5 als Minor, d.h., er kann auf einen K_5 „zusammengezogen“ werden. Wie das funktioniert, wird am folgenden Bild deutlich.

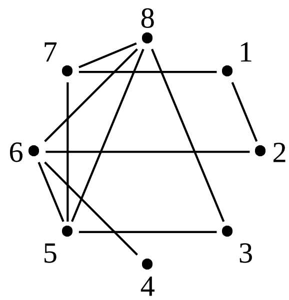


Dabei werden die Kanten, die den inneren Stern mit dem Rand verbinden, zusammengezogen. $\bigcirc$

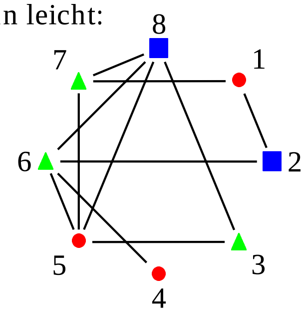
Aufgabe 10.4 (Färbungen). (6 Punkte)

Finde für die folgenden Graphen Färbungen mit möglichst wenig Farben:

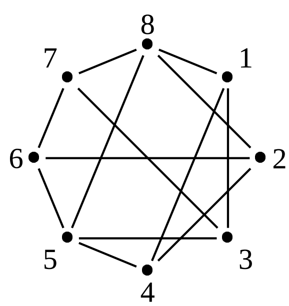
(i)



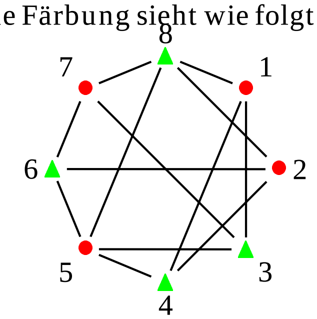
Lösung. Dieser Graph ist wegen der Dreiecke nicht 2-färbbar, aber er ist 3-färbbar: Wir färben zuerst die Dreiecke $\{5,6,8\}$ und $\{5,7,8\}$ mit drei Farben, der Rest ergibt sich dann leicht:



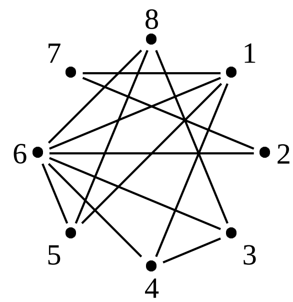
(ii)



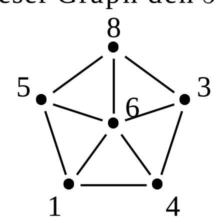
Lösung. Dieser Graph ist 2-färbbar, man sagt auch *bipartit*. Eine Färbung sieht wie folgt aus:



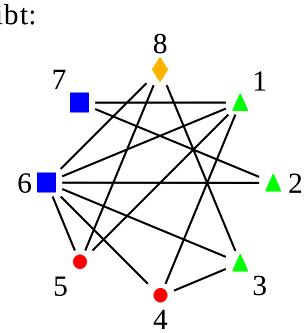
(iii)



Lösung. Dieser Graph ist nicht 2-färbbar, denn er enthält Dreiecke, und auch nicht 3-färbbar. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass dieser Graph den 5-Stern



als Untergraphen hat. (Für den aussen liegenden Fünferkreis brauchen wir schon mal mindestens drei Farben und dann muss der mittlere Knoten notwendigerweise eine vierte Farbe erhalten.) Dieser lässt sich aber mit vier Farben färben, woraus sich dann einfach eine 4-Färbung des ganzen Graphen ergibt:



☺**Aufgabe 10.5** (Fußball). (0+4 Punkte)

Ein Fußball wird aus Fünfecken und Sechsecken zusammengenäht, wobei in jeder Ecke genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen. Wieviele Fünf- und wieviele Sechsecke braucht man? [*Hinweis*: Eulersche Polyederformel.]

Übrigens: mit einem Sechseck und zwei Fünfecken in jeder Ecke würde es nicht funktionieren.

[*Tipp*: Zähle Mengen wie $\left\{ (f,k) \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ Fläche,} \\ k \text{ Kante,} \\ k \subset f \end{array} \right\}$ oder $\left\{ (p,e) \,\middle|\, \begin{array}{l} p \text{ Fünfeck,} \\ e \text{ Ecke,} \\ e \in p \end{array} \right\}$.]

Lösung. Wir bezeichnen mit E die Menge der Ecken und mit K die Menge der Kanten. Die Facetten trennen wir in die Menge P der Fünfecke (Pentagone) und die Menge H der Sechsecke (Hexagone). Entsprechende Kleinbuchstaben bezeichnen jeweils die Anzahl. An jeder Ecke ist genau ein Fünfeck zu finden, ein Fünfeck hat fünf Ecken:

$$\begin{aligned} \#\left\{(p',e') \in P \times E \,\middle|\, e' \in p'\right\} &= \sum_{p' \in P} \underbrace{\#\left\{e' \in E \,\middle|\, e' \in p'\right\}}_{=5} = 5p \\ &= \sum_{e' \in E} \underbrace{\#\left\{p' \in P \,\middle|\, e' \in p'\right\}}_{=1} = e, \end{aligned}$$

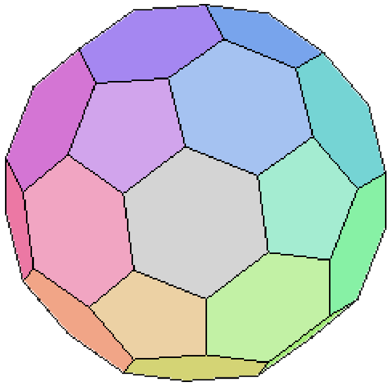
also gilt $5p = e$. An jeder Ecke sind genau zwei Sechsecke zu finden, woraus sich analog $6h = 2e$ ergibt. Ferner stossen in jeder Ecke genau drei Kanten zusammen und jede Kante grenzt an zwei Ecken:

$$\begin{aligned} \#\left\{(k',e') \in K \times E \,\middle|\, e' \in k'\right\} &= \sum_{k' \in K} \underbrace{\#\left\{e' \in E \,\middle|\, e' \in k'\right\}}_{=2} = 2k \\ &= \sum_{e' \in E} \underbrace{\#\left\{k' \in K \,\middle|\, e' \in k'\right\}}_{=3} = 3e, \end{aligned}$$

also gilt $2k = 3e$. Die Eulersche Polyederformel vervollständigt das Puzzle:

$$\begin{array}{rrrrl} e & -k & +p & +h & = 2, \\ 3e & -2k & & & = 0, \\ e & & -5p & & = 0, \\ 2e & & & -6h & = 0. \end{array}$$

Diese vier linearen Gleichungen mit den vier Unbestimmten e, k, p und h haben genau eine Lösung: es muss genau 60 Ecken, 90 Kanten, 12 Fünfecke und 20 Sechsecke geben.



Durch Ausprobieren stellt man fest, dass es so ein Polyeder tatsächlich gibt. Es hat sich übrigens herausgestellt, dass Kohlenstoff sich bisweilen genau so bindet; in jeder Ecke sitzt dann ein Kohlenstoffatom. Dieses C_{60} und ähnliche Moleküle heissen heute Fullerene, zu Ehren des Architekten Buckminster Fuller, da es den von ihm konstruierten geodätischen Kuppeln ähnelt. Sie werden unter anderem als Schmiermittel verwendet. Die Entdecker der Fullerene erhielten 1996 den Nobelpreis für Chemie ○