5. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

PETER SCHEIBLECHNER & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 5.1 (Summation). (4 Punkte)

Bestimme $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} \binom{7\,06\,20\,04}{k}(-1)^k$.

Lösung. Wir betrachten allgemeiner $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} \binom{m}{k}(-1)^k$. Wenn wir mit Δ_k die Differenz bezüglich der Variablen k bezeichnen, gilt

$$(-1)^k \binom{m}{k+1} = (-1)^k \binom{m-1}{k+1} + (-1)^k \binom{m-1}{k} = -\Delta_k (-1)^k \binom{m-1}{k}.$$

Also

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{0 \leq k < n} \binom{m}{k}(-1)^k = \sum_{0 \leq k < n} \Delta_k (-1)^{k-1} \binom{m-1}{k-1} \\ &= (-1)^{n-1} \binom{m-1}{n-1} + \binom{2n-1}{-1} = (-1)^{n-1} \binom{m-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Es folgt sofort mit $m = 7\,06\,20\,04$, dass $s(n) = (-1)^{n-1} \binom{7\,06\,20\,04-1}{n-1}$. ○

Aufgabe 5.2 (Differenzengleichung). (10 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$(*) \qquad (E^3 - E^2 + 2)f = h, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0,$$

wobei $h(n) = n^2$ ist.

(i) Formuliere die Gleichung auf Elementebene.

Lösung. $f(n+3) - f(n+2) - 2f(n) = n^2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$. ○

(ii) Finde alle Lösungen der homogenen Gleichung $(E^3 - E^2 + 2)f = 0$.

Lösung. Die charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung ist

$$x^3 - x^2 + 2 = 0,$$

für die man durch 'Raten' die Lösung -1 findet. (Da $x^3 - x^2 + 2$ normiert ist, muß man nur die vier Teiler des konstanten Koeffizienten $+2$ ausprobieren (Viëta, ...). Wenn keiner von diesen eine Nullstelle ist, dann gibt es keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.) Polynomdivision liefert dann

$$x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2),$$

und durch Lösen der quadratischen Gleichung erhält man

$$x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x-1-i)(x-1+i).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$f(n) = \alpha(-1)^n + \beta(1+i)^n + \gamma(1-i)^n,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. ○

(iii) Finde eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(E^3 - E^2 + 2)f = h$ durch den Ansatz $f_0(n) = an^2 + bn + c$.

Lösung. Setzen wir den Ansatz in Gleichung $(*)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} n^2 &= f_0(n+3) - f_0(n+2) + 2f_0(n) \\ &= a(n+3)^2 + b(n+3) + c - (a(n+2)^2 + b(n+2) + c) + 2(an^2 + bn + c) \\ &= 2an^2 + (2a+2b)n + 5a + b + 2c. \end{aligned}$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten soll, folgt durch Koeffizientenvergleich $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$. Eine spezielle Lösung von $(*)$ lautet also

$$f_0(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$ ○

(iv) Löse $(*)$.

Lösung. Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet

$$f(n) = \alpha(-1)^n + \beta(1+i)^n + \gamma(1-i)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Setzen wir hier die Anfangswerte ein, so folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta + \gamma \\ 1 &= -\alpha + (1+i)\beta + (1-i)\gamma \\ 0 &= \alpha + (1+i)^2\beta + (1-i)^2\gamma \\ &= \alpha + 2i\beta - 2i\gamma. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Also lautet die eindeutige Lösung von $(*)$

$$f(n) = \frac{1}{2}\left((1+i)^n + (1-i)^n + (n+1)(n-2)\right).$$ ○

(v) Zeige $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Lösung. Für jede komplexe Zahl z gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein $t \in \mathbb{R}$ mit $z = re^{it} = r\cos t + ir\sin t$. Spätestens beim Versuch den Betrag zu berechnen, entdecken wir $r = |z|$. Diese Polarkoordinaten wollen wir für $z = 1 + i$ bestimmen. Aus $r\cos t + ir\sin t = 1 + i$ folgt $r\cos t = 1$ und $r\sin t = 1$, also $\tan t = 1$ und $r = |1 + i|$, d.h. $t = \frac{\pi}{4}$ und $r = \sqrt{2}$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ folgt

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{in\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right). \qquad \bigcirc$$

(vi) Erstelle eine Tabelle der Werte von $\cos(n\frac{\pi}{4})$ für soviele kleine Werte von $n \in \mathbb{Z}$, wie nötig sind, um „alles“ darüber zu wissen. [Begründe, welche n nötig sind und welche nicht.]

Lösung. Zunächst ist der Kosinus 2π-periodisch, es genügt also $0 \leq n < 8$ zu betrachten. Wegen $\cos(t + \pi) = -\cos t$ genügt $0 \leq n < 4$, und wegen $\cos(\pi - t) = -\cos t$ genügt $0 \leq n \leq 2$. Es genügen also grundsätzlich schon folgende drei Werte:

n	0	1	2
$\cos(n\frac{\pi}{4})$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Daraus ergibt sich mit den obigen Regeln sofort das folgende periodische Muster.

n rem 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$\cos(n\frac{\pi}{4})$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\bigcirc$

(vii) Verwende die Darstellung aus (v), um die Lösung ohne imaginäre Größen darzustellen.

Lösung. Aus (v) folgt durch Konjugation

$$(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

also

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}\left((1+i)^n + (1-i)^n + (n+1)(n-2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2^{\frac{n}{2}}2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + (n+1)(n-2)\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned} \qquad \bigcirc$$

Aufgabe 5.3 (Differenzengleichung). (4 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$(E - \frac{3}{n+1} I) f = h, \qquad f(0) = 1,$$

wobei $h(n) = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ ist.

Lösung. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt

$$f(n) = \frac{1}{g(n)} \left(\sum_{0 \leq k < n} (Eg \cdot b)(k) + g(0) f(0) \right),$$

wobei für g gilt

$$g(n) = \frac{1}{a(n-1) \cdots a(1)} = \frac{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2}{3^{n-1}} = \frac{n!}{3^{n-1}}.$$

Daraus folgt

$$f(n) = \frac{3^{n-1}}{n!} \left(\sum_{0 \leq k < n} \frac{(k+1)!}{3^k} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} + 3 \right) = \frac{3^{n-1}}{n!} (3n+3) = \frac{3^n (n+1)}{n!}.$$ ○

Aufgabe 5.4 (Verschiedenes). (4 Punkte)

Die Ereignisse A und B seien unvereinbar. Welche Ausagen sind richtig, welche falsch? (Begründung angeben!)

(i) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Lösung. Da A und B unvereinbar sind, gilt $A \cap B = \emptyset$, also $P(A \cap B) = 0$. Es brauchen aber weder $P(A)$ noch $P(B)$ Null zu sein, was das Beispiel $B = U \setminus A$ mit $0 < P(A) < 1$ zeigt. ○

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Lösung. Diese Formel stimmt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$. ○

(iii) $P(A \cup B) = 0$.

Lösung. Im obigen Beispiel ist $P(A \cup B) = P(U) = 1$, die Aussage stimmt also nicht. ○

(iv) $P(A|B) = P(A)$.

Lösung. Es gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$, es muss aber $P(A)$ wieder nicht Null sein, die Aussage stimmt also nicht. ○

Ein Student besteht die Klausur im Fach Statistik mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 und im Fach Mathematik mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7. Die Wahrscheinlichkeit beide Klausuren zu bestehen beträgt 0.5.

(v) Sind die Ereignisse eine Klausur zu bestehen voneinander unabhängig? (Begründung)

Lösung. Sei S das Ereignis, dass der Student die Statistik-Klausur besteht, und M das Ereignis, dass der Student die Mathe-Klausur besteht. Dann ist $P(S \cap M) = 0.5 \neq 0.42 = 0.6 \cdot 0.7 = P(S) \cdot P(M)$, die Ereignisse sind also nicht unabhängig. ○

(vi) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Klausur zu bestehen?

Lösung. $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M) = 0.6 + 0.7 - 0.5 = 0.8.$ ○

Eine Spielbank bietet Ihnen folgendes Glücksspiel an: drei faire Würfel werden gleichzeitig geworfen; der Spieler erhält 66 € für drei Einsen, 10 € für zwei Einsen und 0 € sonst. Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 €.

(vii) Ist das Spiel für die Spielbank vorteilhaft?

Lösung. Sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn der Spielbank in einem Spiel angibt. Dann gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{6^3} \cdot (-64) + \frac{3 \cdot 5}{6^3} \cdot (-8) + \frac{6^3 - 1 - 3 \cdot 5}{6^3} \cdot 2 = 1.$$

Die Bank erwartet also im Schnitt 1 € Gewinn, das Spiel ist also für sie vorteilhaft. ○

(viii) Welchen Gewinn kann die Spielbank oder der Spieler bei einer Serie von 100 Spielen erwarten?

Lösung. Da die Spiele stochastisch unabhängig sind, ist der Erwartungswert von 100 Spielen gleich $100 \cdot E(X) = 100$. Die Bank kann also einen Gewinn von 100 € erwarten, der Spieler erwartet einen Verlust von 100 €. ○

Aufgabe 5.5 (TÜV). (5 Punkte)

Der TÜV einer Kleinstadt überprüfte in einer Woche 400 PKW. Die Kontrolle ergab folgende zweidimensionale Häufigkeitsverteilung (vereinfachtes Modellbeispiel) der Zahl der Beanstandungen X und des Alter Y der PKW in Jahren:

Y / X	2	4	6	Summe
0	100	80	50	230
1	10	40	40	90
2	10	30	20	60
3	0	10	10	20
Summe	120	160	120	400

Berechne

(i) die gemeinsame Verteilung $(x, y) \mapsto P(X = x, Y = y)$.

Lösung.

Y / X	2	4	6	Summe
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{40}$
1	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{40}$
2	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$
3	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$
Summe	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

○

(ii) die Verteilungen von X und Y.

Lösung. Die Verteilungen von X und Y stehen in obiger Tabelle in der Spalte bzw. Zeile „Summe“. ○

(iii) $E(X)$ und $E(Y)$ sowie $\operatorname{var}(X)$ und $\operatorname{var}(Y)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{23}{40} \cdot 0 + \frac{9}{40} \cdot 1 + \frac{3}{20} \cdot 2 + \frac{1}{20} \cdot 3 = \frac{27}{40} = 0.675, \\
E(Y) &= \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 4 + \frac{3}{10} \cdot 6 = 4 \\
\operatorname{var}(X) &= \frac{23}{40} \cdot (\frac{27}{40})^2 + \frac{9}{40} \cdot (\frac{13}{40})^2 + \frac{3}{20} \cdot (\frac{53}{40})^2 + \frac{1}{20} \cdot (\frac{93}{40})^2 = \frac{203\,343}{64\,000} \\
&\approx 3.177 \\
\operatorname{var}(Y) &= \frac{3}{10} \cdot (-2)^2 + \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{10} \cdot 2^2 = 2.4
\end{aligned}$$

○

(iv) die bedingte Verteilung $x \mapsto P_{Y=4}(X = x)$.

Lösung. $P_{Y=4}(X = 0) = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$, $P_{Y=4}(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P_{Y=4}(X = 2) = \frac{3}{16}$, $P_{Y=4}(X = 3) = \frac{1}{16}$. ○

(v) Bestimme Erwartungswert und Varianz von X für 4 Jahre alte Fahrzeuge.

Lösung.

$$
\begin{aligned}
E(X|Y = 4) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{13}{16} \approx 0.813, \\
\operatorname{var}(X|Y = 4) &= \frac{1}{2}(\frac{13}{16})^2 + \frac{1}{4}(\frac{3}{16})^2 + \frac{3}{16}(\frac{19}{16})^2 + \frac{1}{16}(\frac{35}{16})^2 = \frac{3696}{256} \\
&\approx 0.902
\end{aligned}
$$

○

Aufgabe 5.6 (Erwartete Zeit). (4 Punkte)

Betrachte das folgende Programm:

Algorithmus. Kubikwurzel.
Eingabe: Werte $c \in \mathbb{F}_{19}$.
Ausgabe: Ein Wert $x \in \mathbb{F}_{19}$ mit $x^3 = c$.

1. Wiederhole
2. Wähle ein zufälliges Element $x \in \mathbb{F}_{19}$ gleichverteilt.
3. Bis $x^3 = c$.
4. Antworte x.

(i) Erstelle eine Tabelle mit sämtlichen dritten Potenzen in $\mathbb{F}_{19}$.

Lösung. Wir verwenden aus praktischen Gründen das symmetrische Restesystem $\mathbb{F}_{19} = \{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	0	1	8	8	7	−8	7	1	−1	7
$(-x)^3$		−1	−8	−8	−7	8	−7	−1	1	−7

○

(ii) Welche Elemente haben Kubikwurzeln? Wieviele?

Lösung.

c	−8	−7	−1	0	1	7	8
Anzahl Wurzeln von c	3	3	3	1	3	3	3

Alle übrigen Elemente c haben keine Kubikwurzel. ○

Unterscheide im Folgenden jeweils die drei Fälle, dass c keine, eine oder drei Kubikwurzeln hat.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewürfeltes Element $x \in \mathbb{F}_{19}$ eine Kubikwurzel von c ist?

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass $x \in \mathbb{F}_{19}$ eine Kubikwurzel von $c \in \mathbb{F}_{19}$ ist, ist $\frac{n}{19}$, wobei $n \in \{0, 1, 3\}$ die Anzahl der Kubikwurzeln von c ist. Sei X eine Zufallsvariable, die also dem Würfeln eines zufälligen Elementes aus $\mathbb{F}_{19}$ enspricht. Dann ist:

c	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9
$P(X^3 = c)$	$\frac{1}{19}$	$\frac{3}{19}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{19}$	$\frac{3}{19}$	0

(ii) Wie groß ist die erwartete Laufzeit des Algorithmus?

Lösung. Sei n wieder die Anzahl der Kubikwurzeln der Eingabe $c \in \mathbb{F}_{19}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schleife abgebrochen wird, $\frac{n}{19}$, also beträgt die erwartete Anzahl an Schleifendurchgängen $\frac{19}{n}$ (im Falle $n = 0$ ist dies als ∞ zu interpretieren, wir haben also eine Endlosschleife). Wenn das zufällige Wählen von x und das Prüfen der Bedingung $x^3 = c$ zusammen die Zeit t benötigen, ist also die erwartete Laufzeit $\frac{19t}{n}$.

c	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9
E(Laufzeit)	19	$\frac{19}{3}$	∞	∞	∞	∞	∞	$\frac{19}{3}$	$\frac{19}{3}$	∞

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Algorithmus nicht besonders schlau vorgeht. Würde ein entsprechender Algorithmus eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad k in $\mathbb{F}_q$ raten (denn das ist es, was er tut!), so wäre die erwartete Laufzeit *bestenfalls* $\frac{q}{k}$ Durchläufe mit je $\mathcal{O}(k)$ Rechenoperationen, also Zeit $\mathcal{O}(q)$, solange das Polynom tatsächlich k verschiedene Nullstellen hat. Gute Algorithmen brauchen hingegen nur Zeit $\mathcal{O}^{\sim}(k \log q)$ und finden dabei sogar alle Nullstellen (auch wenn es gar keine gibt, merken sie das). Bezogen auf q ist das ein dramatischer Unterschied!

☺Wer fragt, wird schlau!

Aufgabe 5.7 (Multimilliardär Meier). (4 Punkte)

Wir nehmen einmal an, dass es in der Spielbank Bad Oeynhausen beim Roulette keinen Höchsteinsatz gibt. Multimilliardär Meier, der über beliebig viel Geld verfügt, spielt nach der folgenden Strategie: Er setzt immer auf die Kolonne $\{1, 2, \ldots, 12\}$, hat also pro Spiel eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{12}{38}$. Im Gewinnfalle wird der dreifache Einsatz ausbezahlt. Sein erster Einsatz beträgt 1 €. Im Falle eines Gewinns kassiert er den Reingewinn (also den Gewinn weniger den Einsatz), sonst verdoppelt er beim nächsten Spiel seinen Einsatz. Er spielt auf diese Weise so lange, bis er einmal gewinnt. Die Zufallsvariable X bezeichne den Reingewinn in € in einer solchen Serie.

(i) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (Es kann sein, dass $E(X)$ unerwartet hoch ausfällt.)

Lösung. Sei $p = \frac{12}{38}$ die Gewinnwahrscheinlichkeit in einem Spiel. Da der Einsatz im ersten Spiel 1 ist und in jedem Spiel verdoppelt wird, ist er im n-ten Spiel 2^{n-1}. Wenn Herr Meier im n-ten Spiel gewinnt, so erhält er das 3-fache des Einsatzes, also $3 \cdot 2^{n-1}$ ausbezahlt, hat aber bereits insgesamt $\sum_{1 \le k < n+1} 2^{k-1} = 2^n - 1$ eingesetzt, der Nettogewinn beträgt also $X = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^n + 1 = 2^{n-1} + 1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er im n-ten Spiel gewinnt, beträgt $q^{n-1}p$, wobei $q = 1 - p$ die Verlustwahrscheinlichkeit ist. Er muss ja in allen $n - 1$ Spielen vorher verlieren. Deshalb ist der Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{1 \le n} q^{n-1} p (2^{n-1} + 1) = p \underbrace{\sum_{0 \le n} (2q)^n}_{=\infty} + p \underbrace{\sum_{0 \le n} q^n}_{=1} = \infty,$$

da $q > \frac{1}{2}$, also $2q > 1$ ist. ◯

(ii) Berechne den Erwartungswert $E(X)$, falls er wegen eines Banklimits von 1 000 000 € nicht beliebig oft verdoppeln kann.

Lösung. Sei $L = 1\,000\,000$ das Banklimit. Das Spiel endet also nicht nur, wenn Herr Meier gewinnt, sondern auch, wenn der Einsatz $2^{n-1} > L$, also $n > \log_2 L + 1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt q^m mit $m := \lfloor \log_2 L + 1 \rfloor$. In diesem Falle verliert er seinen gesamten Einsatz $\sum_{1 \le n < m+1} 2^{n-1} = 2^m - 1$. Für den Erwartungswert gilt also

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{1 \le n < m+1} p q^{n-1} (2^{n-1} + 1) - q^m (2^m - 1) \\
&= p \frac{1 - (2q)^m}{1 - 2q} + p \frac{1 - q^m}{1 - q} - (2q)^m + q^m \\
&= \frac{p(1 - (2q)^m) - (1 - 2q)(2q)^m}{1 - 2q} + 1 \\
&= \frac{p - p(2q)^m - (2q)^m + (2q)^{m+1}}{1 - 2q} + 1 \\
&= \frac{p + (2q)^m (2q - 1 - p)}{1 - 2q} + 1 \\
&= \frac{p + (1 - p)^m 2^m (1 - 3p)}{2p - 1} + 1.
\end{aligned}$$

Mit $m = 20$ und $p = \frac{12}{38}$ gilt $E(X) \approx -76.6$. ◯

(iii*) Wie erklärst Du die Diskrepanz?

Lösung. Der Erwartungswert im Falle mit Limit besteht aus der m-ten Partialsumme der (divergenten) Reihe aus dem Fall ohne Limit und dem

Term $q^m(2^m - 1)$, der ein Produkt aus einer Nullfolge und einer gegen ∞ divergenten Folge ist. Lassen wir $m \to \infty$ gehen, geht der Erwartungswert gegen $-\infty$, da in obiger Formel der Nenner negativ und der Zähler stets positiv ist und gegen ∞ geht (je größer das Limit, desto größer der Verlust). Symbolisch geschrieben bedeutet das

$$\infty - 0 \cdot \infty = -\infty,$$

also geht der letzte Term so schnell gegen Unendlich, dass er gegenüber dem ersten Term immer noch dominiert, wenn man ihn mit einer Nullfolge multipliziert. $\bigcirc$

Aufgabe 5.8 (Alarmanlage). (2 Punkte)

In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch gibt sie Alarm mit der Wahrscheinlichkeit 0.99. Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie falschen Alarm mit der Wahrscheinlichkeit von 0.005. (Etwa weil eine Maus die Anlage berührt.) Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0.001. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch im Gange ist? (Die meisten Alarme, wie etwa Feueralarme, sind falsche Alarme.)

Lösung. Sei E das Ereignis, dass ein Einbruch stattfindet, und A, dass die Alarmanlage Alarm gibt. Dann gilt nach Voraussetzung

$$P(A|E) = 0.99, \quad P(A|\overline{E}) = 0.005, \quad P(E) = 0.001.$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch stattfindet, unter der Bedingung, dass die Alarmanlage Alarm geschlagen hat, also $P(E|A)$. Nun ist $P(A|E) = P(A \cap E)/P(E)$, woraus wir $P(A \cap E) = P(A|E)P(E) = 0.99 \cdot 0.001 = 0.0099$ erhalten. Entsprechend bekommen wir $P(A \cap \overline{E}) = P(A|\overline{E})P(\overline{E}) = 0.005 \cdot 0.999 = 0.004995$. Weil A die disjunkte Vereinigung von $A \cap E$ und $A \cap \overline{E}$ ist, erhalten wir nun

$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E}) = 0.0099 + 0.004995 = 0.005985.$$

Damit erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{0.0099}{0.005985} \approx 16.54\%. \qquad \bigcirc$$

Lösung. Sei E das Ereignis, dass ein Einbruch stattfindet, und A, dass die Alarmanlage Alarm gibt. Dann gilt nach Voraussetzung

$$P(A|E) = 0.99, \quad P(A|\overline{E}) = 0.005, \quad P(E) = 0.001.$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch stattfindet, unter der Bedingung, dass die Alarmanlage Alarm geschlagen hat, also $P(E|A)$. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A)}.$$

Da wir aber $P(A)$ nicht direkt gegeben haben, sondern die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten unter zwei Gegenereignissen E und $\overline{E}$, versuchen wir, diese durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten auszudrücken. Es ist ja $A = (A \cap E) \cup (A \cap \overline{E})$ eine disjunkte Zerlegung, also gilt

$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E})$$

und somit

$$\begin{aligned}
P(E|A) &= \frac{P(A|E)P(E)}{P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E})} = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A|E)P(E) + P(A|\overline{E})P(\overline{E})} \\
&= \frac{P(A|E)P(E)}{P(A|E)P(E) + P(A|\overline{E})(1 - P(E))} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.99 \cdot 0.001 + 0.005 \cdot (1 - 0.001)} \\
&= \frac{22}{133} \approx 0.1654.
\end{aligned}$$

Wenn die Alarmanlage losgegangen ist, kann man also in ca. 17% der Fälle davon ausgehen, dass tatsächlich ein Einbruch stattgefunden hat. ○

Aufgabe 5.9 (Geburtstag). (2 Punkte)

In einem Raum befinden sich n Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung. Wenn wir Schaltjahre außer acht lassen, hat eine Person an einem von 365 Tagen im Jahr Geburtstag. Wir betrachten zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Die erste Person kann an einem beliebigen Tag Geburtstag haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Person an einem anderen Tag Geburtstag hat als die erste, beträgt $\frac{365-1}{365}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte Person an einem anderen Tag Geburtstag hat als die ersten beiden, beträgt $\frac{365-2}{365}$ usw. Die Wahrscheinlichkeit, dass die i-te Person an einem anderen Tag Geburtstag hat als die ersten $i-1$, beträgt $\frac{365-i+1}{365}$. Wenn man davon ausgeht, dass die Ereignisse, an welchem Tag die Personen Geburtstag haben, unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} = \frac{365^{\underline{n}}}{365^n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist also die Gegenwahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{365^{\underline{n}}}{365^n}.$$ ○

Lösung. Man kann das Ganze auch noch ein klein wenig anders anschauen. Wir lassen wieder Schaltjahre außer Acht und berücksichtigen nur 365 Tage. Dann ist die Wahrscheinlichkeit an einem bestimmten Tag im Jahr geboren zu sein, $p = \frac{1}{365}$. Wieder bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass alle n Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Um das auch in Formeln ausdrücken zu können, bezeichne G_i die Zufallsvariable, deren Wert der Geburtstag der i-ten Person ist. Für $n = 1$ ist das klar, $P\big(\#\{G_1\} = 1\big) = 1$. Nun ist die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
&P\Big(\#\{G_1,\ldots,G_n\} = n \Big| \#\{G_1,\ldots,G_{n-1}\} = n-1\Big) \\
&= P\Big(G_n \notin \{G_1,\ldots,G_{n-1}\} \Big| \#\{G_1,\ldots,G_{n-1}\} = n-1\Big),
\end{aligned}$$

dass die n-te Person an einem anderen Tag Geburtstag hat, als die $n-1$ Personen zuvor, gerade $1-(n-1)p$. (Das ergibt sich automatisch, wenn wir annehmen, dass die Geburtstage (G_i) unabhängig sind.) Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, gerade gleich der Wahrscheinlichkeit, dass dies für $n-1$ Personen gilt, mal die genannte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
&P\Big(\#\{G_1,\ldots,G_n\} = n\Big) \\
&= P\Big(\#\{G_1,\ldots,G_n\} = n \Big| \#\{G_1,\ldots,G_{n-1}\} = n-1\Big) \\
&\qquad \cdot P\Big(\#\{G_1,\ldots,G_{n-1}\} = n-1\Big) \\
&= \prod_{1\le i\le n} (1-(i-1)p) = \prod_{1\le i<n} (1-ip).
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist damit

$$P\big(\#\{G_1,\ldots,G_n\} < n\big) = 1 - \prod_{1\le i<n} (1-\frac{i}{365}).$$

Das ist dasselbe Ergebnis wie oben, oder? ○

Schon bei $n = 23$ Personen gibt es übrigens bereits mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50.7% zwei Personen, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Unter den 195 Studierenden, die für Blatt 3 zwölf oder mehr Punkte bekommen haben, haben mit Wahrscheinlichkeit

$$99.99999999999999999999999992204\%$$

zwei am gleichen Tag Geburtstag. Das ist ziemlich sicher.