4. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

PETER SCHEIBLECHNER & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 4.1 (Summen). (3 Punkte)

Wir erinnern uns an die Teilsummen $H(n) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j}$ der harmonischen Reihe.

(i) Sei $f(n) = nH(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Berechne Δf.

Lösung.

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= (\Delta n)H(n+1) + n(\Delta H)(n) = H(n+1) + \frac{n}{n+1} \\ &= H(n) + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = H(n) + 1.\end{aligned}$$

(ii) Bestimme $s(n) = \sum_{1 \leq k < n} H(k)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}s(n) &= \sum_{1 \leq k < n} \sum_{1 \leq \ell \leq k} \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leq \ell \leq k < n} \frac{1}{\ell} \\ &= \sum_{1 \leq \ell < n} \sum_{\ell \leq k < n} \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leq \ell < n} \frac{1}{\ell} \sum_{\ell \leq k < n} 1 \\ &= \sum_{1 \leq \ell < n} \frac{n-\ell}{\ell} = n \sum_{1 \leq \ell < n} \frac{1}{\ell} - \sum_{1 \leq \ell < n} 1 \\ &= nH(n-1) - n + 1 = nH(n) - n.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $1 = n/n$ verwendet.

Lösung. Wegen (i) ist $\Delta(nH(n) - n) = H(n) + 1 - 1 = H(n)$ und nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned}s(n) = \sum_{1 \leq k < n} H(k) &= nH(n) - n - 1 \cdot H(1) + 1 \\ &= nH(n) - n.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 (Differenzengleichung). (6 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$\left(E^3 - 4E^2 - 4E + 16\right) f = 72, \qquad f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

Lösung. Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$(E^3 - 4E^2 - 4E + 16)f = 0$$

und machen den Ansatz $f(n) = \lambda^n$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dies liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0,$$

die die drei Lösungen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$ hat. Wir haben also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$f_h(n) = a \cdot 2^n + b \cdot (-2)^n + c \cdot 4^n$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir wissen, dass wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung bekommen. Also müssen wir nur noch eine spezielle Lösung finden. Da die rechte Seite der Gleichung konstant (unabhängig von n) ist, ist es plausibel, eine konstante Lösung $f(n) = d$ mit $d \in \mathbb{R}$ zu suchen. Setzen wir dies in die Gleichung ein, so bekommen wir

$$d - 4d - 4d + 16d = 9d = 72,$$

also $d = 8$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$f_h(n) = a \cdot 2^n + b \cdot (-2)^n + c \cdot 4^n + 8$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Setzen wir hier die drei Anfangswerte ein, so bekommen wir für die Koeffizienten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -7 &= a + b + c, \\ -6 &= 2a - 2b + 4c, \\ -4 &= 4a + 4b + 16c. \end{aligned}$$

Dieses hat die eindeutige Lösung $a = -8$, $b = -1$ und $c = 2$. Die eindeutige Lösung der gegebenen Differenzengleichung lautet also

$$f(n) = 2 \cdot 4^n - 8 \cdot 2^n - (-2)^n + 8. \qquad \bigcirc$$

Aufgabe 4.3 (Differenzengleichung). (6 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$\left(E^3 - 4E^2 + 6E - 4\right) f = 0, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 2.$$

Lösung. Wir machen wieder den Ansatz $f(n) = \lambda^n$ und erhalten die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0.$$

Die Lösung $\lambda_1 = 2$ kann man erraten, durch Polynomdivision erhält man dann

$$(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4) = (\lambda - 2) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 2),$$

das verbleibende quadratische Polynom hat jedoch keine reellen Nullstellen. Es hindert uns aber niemand daran, die echt komplexen Nullstellen zu betrachten und zu sehen, ob wir damit eine reelle Lösung f bekommen. Die echt komplexen Nullstellen sind $\lambda_2 = 1 + i$ und $\lambda_3 = 1 - i$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist also gegeben durch

$$f(n) = a2^n + b(1 + i)^n + c(1 - i)^n,$$

wobei wir vorsichtshalber $a, b, c \in \mathbb{C}$ zulassen. Wie gewohnt setzen wir nun die Anfangswerte in die Lösung ein und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c, \\ 1 &= 2a + (1 + i)b + (1 - i)c, \\ 2 &= 4a + (1 + i)^2 b + (1 - i)^2 c = 4a + 2ib - 2ic \end{aligned}$$

und suchen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dieses Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}i$, $c = \frac{1}{2}i$. Die eindeutige Lösung unserer Differenzengleichung lautet also

$$f(n) = -\frac{1}{2}i\,(1 + i)^n + \frac{1}{2}i\,(1 - i)^n.$$

Handelt es sich hierbei eigentlich um eine reelle Lösung? Man beachte, dass die Funktion von der Form $f(n) = az^n + \overline{a}\,\overline{z}^n$ mit $a, z \in \mathbb{C}$ ist. Daraus folgt $\overline{f(n)} = \overline{az^n + \overline{a}\,\overline{z}^n} = \overline{a}\,\overline{z}^n + \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{z}}^n = \overline{a}\,\overline{z}^n + az^n = f(n)$, also ist die Lösung reell. ◯

Aufgabe 4.4 (Differenzengleichung). (6 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$\left(E - \frac{n+1}{n+2} I\right) f = n^3, \qquad f(0) = 0.$$

Lösung. Hierbei handelt es sich um eine lineare Differenzengleichung mit *nicht*-konstanten Koeffizienten, wir können also nicht einfach so vorgehen wie in den letzten Beispielen. Stattdessen versuchen wir wie in der Vorlesung, die Gleichung auf eine einfachere zu reduzieren. Wir multiplizieren die Gleichung mit einer noch unbekannten Funktion $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und erhalten

$$\begin{aligned} n^{\underline{3}} g(n+1) &= g(n+1)(E - \frac{n+1}{n+2} I) f(n) \\ &= g(n+1) f(n+1) - \frac{n+1}{n+2} g(n+1) f(n). \end{aligned}$$

Wählt man g so, dass $g(n) = g(n+1)\frac{n+1}{n+2}$ gilt, so ist dies äquivalent zu

$$n^{\underline{3}} g(n+1) = (\Delta f g)(n).$$

Nach dem Hauptsatz folgt hieraus

$$\sum_{0 \le k < n} k^{\underline{3}} g(k+1) = f(n)g(n) - f(0)g(0) = f(n)g(n),$$

wegen $f(0) = 0$, also

$$f(n) = \frac{1}{g(n)} \left(\sum_{0 \le k < n} k^{\underline{3}} g(k+1) \right),$$

zumindest, wenn $g(n) \neq 0$. Um eine passende Funktion g zu finden, löst man die definierende Rekursion auf:

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n+1}{n} g(n-1) = \frac{n+1}{n} \frac{n}{n-1} g(n-2) \\ &= \cdots = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} g(0) \\ &= (n+1) g(0). \end{aligned}$$

Da g sowieso nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, können wir gefahrlos $g(0) = 1$ wählen, so dass $g(n) = n + 1$ ist. Daraus folgt

$$f(n) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{0 \le k < n} k^{\underline{3}} (k+2) \right),$$

Wir müssen nun also eine diskrete Stammfunktion von $n^{\underline{3}}(n+2)$ bestimmen, das heisst die einfachere Differenzengleichung $(\Delta s)(n) = n^{\underline{3}}(n+2)$ lösen. Mit Hilfe der Stirling-Zahlen bekommt man

$$\begin{aligned} n^{\underline{3}}(n+2) &= n(n-1)(n-2)(n+2) = (n^2 - n)(n^2 - 4) = n^4 - n^3 - 4n^2 + 4n \\ &\overset{VL}{=} n^{\underline{4}} + 6n^{\underline{3}} + 7n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}} - (n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}) - 4(n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}) + 4n^{\underline{1}} \\ &= n^{\underline{4}} + 5n^{\underline{3}}, \end{aligned}$$

was man direkt summieren kann:

$$\sum n^3(n+2) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{5}{4}n^4.$$

Hieraus folgt

$$f(n) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{5}n^5 + \frac{5}{4}n^4\right) = \frac{n^4(4n+9)}{20(n+1)}.$$ ○

Aufgabe 4.5 (Skat). (5 Punkte)

Skat wird von drei Spielern (Tick, Trick und Track) und einem Kartenspiel bestehend aus 32 verschiedenen Karten gespielt. Zu Beginn des Spiels erhält jeder der drei Spieler ein "Blatt" von 10 Karten, die übrigen 2 Karten liegen im sogenannten "Skat".

(i) Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Kartenspiel mit 32 Karten zu mischen?

Lösung. Eine Mischung entspricht einer Permutation der Karten, also gibt es $32! = 263\,130\,836\,933\,693\,530\,167\,218\,012\,160\,000\,000 \approx 2.63 \cdot 10^{35}$ Mischungen. ○

(ii) Wieviele mögliche Blätter kann ein Spieler bekommen?

Lösung. Ein Blatt ist eine Ziehung von 10 aus 32 Karten ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Also gibt es $\binom{32}{10} = 64\,512\,240 \approx 6.45 \cdot 10^7$ Blätter. ○

(iii) Wieviele mögliche Verteilungen der Karten gibt es insgesamt, wenn

(a) die Spieler unterschieden werden?

Lösung. Der erste zieht 10 aus 32, der zweite 10 aus 22, der dritte 10 aus 12, also gibt es $\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = 2\,753\,294\,408\,504\,640 \approx 2.75 \cdot 10^{15}$ Verteilungen. ○

(b) die Spieler nicht unterschieden werden?

Lösung. Wenn die Spieler nicht unterschieden werden, muss man die eben errechnete Zahl durch die Anzahl der Permutationen der drei Spieler teilen, also gibt es $\frac{1}{3!} \cdot \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = 458\,882\,401\,417\,440 \approx 4.59 \cdot 10^{14}$ Verteilungen ohne Unterscheidung der Spieler. ○

(iv) Im Spiel sind insgesamt vier Asse. Wieviele mögliche Verteilungen der Karten gibt es, wenn jeder Spieler genau ein As erhält?

Lösung. Der erste Spieler hat 4 Asse zur Auswahl und dann noch 9 aus 28 Nicht-Assen, der zweite hat 3 Asse und 9 aus 19 Nicht-Assen und der dritte hat 2 Asse und 9 aus 10 Nicht-Assen zur Auswahl, also gibt es insgesamt $4 \cdot \binom{28}{9} \cdot 3 \cdot \binom{19}{9} \cdot 2 \cdot \binom{10}{9} = 153\,130\,945\,968\,000 \approx 1.53 \cdot 10^{14}$ Verteilungen mit dieser Bedingung. ○

Aufgabe 4.6 (Erwartungswert). (1 Punkt)

Bestimme die erwartete Augensumme von vier Würfeln.

Lösung. Der Wahrscheinlichkeitsraum sei $U := \{1, \ldots 6\}^4$, und wir nehmen an, dass es sich um faire Würfel handelt, dh. die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist $P(\omega) = (\frac{1}{6})^4$ für alle $\omega \in U$. Sei $X_i \colon U \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, die die Augenzahl des i-ten Würfels angibt, dh. X_i ist die Projektion $X_i(\omega_1, \ldots, \omega_4) = \omega_i$. Und wir haben $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) = (\frac{1}{6})^4$ für jedes denkbare Ergebnis $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{1, \ldots, 6\}^4$. Dann gilt für den Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{1 \le x_1, \ldots, x_4 \le 6} X_1(x_1, \ldots, x_4) \cdot P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\
&= \sum_{1 \le x_1 \le 6} x_1 \sum_{x_2, x_3, x_4 \in \{1, \ldots, 6\}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\
&= \sum_{1 \le x_1 \le 6} x_1 \cdot P\left(\bigcup_{x_2, x_3, x_4 \in \{1, \ldots, 6\}} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4\} \right) \\
&= \sum_{1 \le x_1 \le 6} x_1 \cdot P(X_1 = x_1, X_2 \in \{1, ..., 6\}, X_3 \in \{1, ..., 6\}, X_4 \in \{1, ..., 6\}) \\
&= \sum_{1 \le x_1 \le 6} x_1 \cdot P(X_1 = x_1) \\
&= 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Wir können natürlich gleich die erste Zeile direkt auswerten:

$$
E(X_1) = \sum_{1 \le x_1, \ldots, x_4 \le 6} \frac{x_1}{6^4} = \frac{6^3}{6^4} \sum_{1 \le x_i \le 6} x_i = \frac{1}{6} \frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{7}{2}.
$$

Das Ganze klappt natürlich ganz analog für die anderen Würfel: $E(X_i) = \frac{7}{2}$. Nun ist der Erwartungswert der Summe

$$
E(X_1 + \cdots + X_4) = E(X_1) + \cdots + E(X_4) = 4 \cdot \frac{7}{2} = 14.
$$ ○

Aufgabe 4.7 (Erwartete Zeit). (3 Punkte)

Falschspieler verwendet einen Würfel W mit

$$\begin{aligned} \text{prob}(W = 6) &= \frac{64}{100}, \\ \text{prob}(W = k) &= \frac{8}{100} \quad \text{für } k \in \{2, 3, 4, 5\}, \\ \text{prob}(W = 1) &= \frac{4}{100}. \end{aligned}$$

(i) Bestimme die erwartete Augensumme von vier Würfeln.

Lösung. Wir bestimmen erst einmal den Erwartungswert der Augenzahl bei einem Wurf W. Dann ist

$$\begin{aligned} E(W) &= 1 \cdot P(W = 1) + 2 \cdot P(W = 2) + 3 \cdot P(W = 3) \\ &\quad + 4 \cdot P(W = 4) + 5 \cdot P(W = 5) + 6 \cdot P(W = 6) \\ &= 1 \cdot \frac{4}{100} + 2 \cdot \frac{8}{100} + 3 \cdot \frac{8}{100} + 4 \cdot \frac{8}{100} + 5 \cdot \frac{8}{100} + 6 \frac{64}{100} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder Zufallsvariablen X_i auf dem Universum $U = \{1, \ldots, 6\}^4$ mit $X_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_i$. Diesmal soll die Wahrscheinlichkeitsfunktion aber gegeben sein durch $P(x_1, \ldots, x_4) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)P(X_3 = x_3)P(X_4 = x_4)$ mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten $P(X_i = x_i) = P(W = x_i)$. Damit haben wir „erzwungen“, dass die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind. Für den Erwartungswert des ersten Wurfes gilt wie in Aufgabe 4.6 $E(X_i) = \sum_{1 \leq x_i \leq 6} x_i \cdot P(X_i = x_i)$. Mit $P(X_i = x_i) = P(W = x_i)$ ist das genau der Erwartungswert von W. Also $E(X_i) = 5$. Also bekommen wir für die erwartete Augensumme

$$E(X_1 + \cdots + X_4) = E(X_1) + \cdots + E(X_4) = 4 \cdot 5 = 20.$$ ○

(ii) Bestimme die erwartete Anzahl von Würfen bis eine Sechs fällt.

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf eine Sechs fällt, ist $\frac{64}{100}$. Nach der Vorlesung ist die erwartete Zeit bis zu diesem Ereignis gerade deren Kehrwert, also erwarten wir (im Durchschnitt) $\frac{25}{16} \approx 1.56$ Würfe. ○

Lösung. Und hier nochmal das Ganze, ohne das Ergebnis aus der Vorlesung zu verwenden, mit allen Details.

Da nur endliche Wahrscheinlichkeitsräume eingeführt wurden, betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Wahrscheinlichkeitsraum (U_n, P_n), der n Würfe mit dem Würfel modelliert. Also $U_n := \{1, \ldots, 6\}^n$ und

$$\begin{aligned} P_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) &= P_n(X_1^{(n)} = \omega_1) \cdots P_n(X_n^{(n)} = \omega_n) \\ &= P(W = \omega_1) \cdots P(W = \omega_n), \end{aligned}$$

wobei für $1 \leq i \leq n$ analog zur letzten Aufgabe $X_i^{(n)} \colon U_n \to \{0, \ldots, 6\}$ die Projektion $X_i^{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i$ ist. Wir definieren nun die Zufallsvariable $I_n \colon U_n \to \mathbb{N}$ durch

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \begin{cases} \min\{i \in \{1, \ldots, n\} \,|\, \omega_i = 6\}, & \text{falls } 6 \in \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \\ n+1, & \text{falls } 6 \notin \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}. \end{cases}$$

Sie ist gleich der Nummer des ersten 6er-Wurfs, falls es einen solchen unter den ersten n Würfen gibt. Falls nicht, so ist der erste 6er-Wurf mindestens Nummer $n+1$, deshalb ist unsere Zufallsvariable eine untere Abschätzung für den ersten 6er. Wir bezeichnen nun mit $p := P(W = 6) = \frac{16}{25}$ die Erfolgs- und mit $q := 1 - p = P(W \neq 6) = P(W = 1) + P(W \in \{2, \ldots, 5\}) = \frac{9}{25}$ die Misserfolgswahrscheinlichkeit. Dann gilt $P_n(I_n = i) = q^{i-1}p$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, da die ersten $i-1$ Würfe keine 6 sein dürfen. Für $i = n+1$ gilt $P_n(I_n = n+1) = q^n$. Für den Erwartungswert gilt also

$$\begin{aligned} E(I_n) = \sum_{\omega \in U_n} I_n(\omega) P_n(\omega) &= \sum_{1 \leq i \leq n+1} \sum_{\substack{\omega \in U_n \\ I_n(\omega) = i}} \underbrace{I_n(\omega)}_{i} P_n(\omega) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n+1} i P_n(I_n = i) = \sum_{1 \leq i \leq n} i q^{i-1} p + (n+1) q^n \\ &= (1-q) \sum_{1 \leq i \leq n} i q^{i-1} + (n+1) q^n \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} i q^{i-1} - \sum_{1 \leq i \leq n} i q^i + (n+1) q^n \\ &= 1 + \sum_{1 \leq i < n} (i+1) q^i - \sum_{1 \leq i < n} i q^i - n q^n + (n+1) q^n \\ &= 1 + \sum_{1 \leq i < n} q^i + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - q^{n+1}}{p}. \end{aligned}$$

Die erwartete Anzahl Würfe bis zu ersten 6 ist also

$$\lim_{n\to\infty} E(I_n) = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{p} = \frac{1}{p} = \frac{25}{16} \approx 1.56,$$

da $0 \leq q < 1$. ◯

(iii) Bestimme die erwartete Anzahl von Würfen bis eine Eins fällt.

Lösung. Die Rechnung der letzten Teilaufgabe bleibt auch hier unverändert gültig, nur dass wir andere Werte für p und q nehmen müssen, nämlich $p = P(W = 1) = \frac{1}{25}$ und $q = 1 - p = \frac{24}{25}$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} E(I_n) = \frac{1}{p} = 25.$$ ◯

☺**Aufgabe 4.8** (Bunte Häuser). (0+2 Punkte)

Alle Wolkenkratzer in New York City werden bunt angestrichen, doch jedes Stockwerk in nur einer Farbe. Dabei werden immer die Farben blau und gelb verwendet, aber zwei benachbarte Stockwerke dürfen niemals beide gelb sein. Wieviele Möglichkeiten gibt es für das Empire State Building?

Lösung. Schreiben wir g für gelb und b für blau, so ist die Farbe eines Stockwerks eines Wolkenkratzers gegeben durch ein Element in $\{g, b\}$. Eine Färbung eines Wolkenkratzers mit n Stockwerken ist gegeben durch ein n-Tupel $(c_1, \ldots, c_n) \in \{g, b\}^n$, wobei $c_i = g \Rightarrow c_{i+1} = b$ für alle $1 \leq i < n$ gelten muss. Bezeichne M_n die Menge dieser n-Tupel und $f(n) := \#M_n$ ihre Anzahl. Dann gilt die disjunkte Zerlegung

$$M_n = \{(c_1, \ldots, c_n) \in M_n \,|\, c_n = g\} \cup \{(c_1, \ldots, c_n) \in M_n \,|\, c_n = b\},$$

also

$$\begin{aligned}
f(n+2) &= \#M_{n+2} \\
&= \#\big(\{(c_1, \ldots, c_{n+2}) \in M_{n+2} \,|\, c_{n+2} = g\} \\
&\qquad \cup \{(c_1, \ldots, c_{n+2}) \in M_{n+2} \,|\, c_{n+2} = b\}\big) \\
&= \#\{(c_1, \ldots, c_{n+1}, g) \in M_{n+2}\} + \#\{(c_1, \ldots, c_{n+1}, b) \in M_{n+2}\} \\
&= \#\{(c_1, \ldots, c_n, b, g) \,|\, (c_1, \ldots, c_n) \in M_n\} \\
&\qquad + \#\{(c_1, \ldots, c_{n+1}, b) \,|\, (c_1, \ldots, c_{n+1}) \in M_{n+1}\} \\
&= f(n) + f(n+1)
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben also die lineare Differenzengleichung

$$(*) \qquad (E^2 - E - I)f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 2$$

mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Stünde hier $f(1) = 1$, so bekämen wir genau die Fibonacci-Zahlen. Ein ganz klein wenig Nachdenken zeigt, dass $f(n) = 2F_n$ eine Lösung ist. Aber rechnen wir trotzdem nochmal die Formel aus: Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

und hat wieder die beiden Lösungen $\lambda_1 = \varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\lambda_2 = \overline{\varphi} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet demnach

$$f(n) = a\varphi^n + b\overline{\varphi}^n$$

mit $a, b, \in \mathbb{R}$. Setzt man hier die Anfangswerte ein, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 2 &= a\varphi + b\overline{\varphi}, \end{aligned}$$

das die eindeutige Lösung $a = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $b = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$ hat. Die eindeutige Lösung von $(*)$ lautet also

$$f(n) = 2\frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\varphi - \overline{\varphi}}. = \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Das Empire State Building hat 103 Stockwerke (laut `http://www.esbnyc.com/tourism/tourism_facts.cfm`), also gibt es hierfür

$$f(103) = 3001\,041072\,413792\,166554 \approx 3 \cdot 10^{21}$$

Färbungen. (102 ist auch nicht ganz falsch, $f(102) = 1854\,745384\,386157\,998352$.) Das muss man sich auf der Zunge zergehen lassen: 3 Trilliarden 1 Trillion 41 Billiarden 72 Billionen 413 Milliarden 792 Millionen 166554. (In amerikanischem Englisch klingt's nach noch viel mehr: 3 sextillion 1 quintillion 41 quadrillion 72 trillion 413 billion 792 million 166554.) ○