3. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

PETER SCHEIBLECHNER & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 3.1 (Differenzen). (4 Punkte)

Bestimme die Differenz Δf für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(n) = n(n-1)2^{n-2}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= (n+1)n2^{n-1} - n(n-1)2^{n-2}\\ &= n2^{n-2}(2(n+1)-(n-1)) = n2^{n-2}(n+3).\end{aligned}$$

(ii) $f(n) = n^5 3^{n(n-1)}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= (n+1)^5 3^{(n+1)n} - n^5 3^{n(n-1)}\\ &= 3^{n(n+1)}\left((n+1)^5 - n^5 3^{-2n}\right)\\ &= 3^{n(n+1)}\left((1-3^{-2n})n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1\right).\end{aligned}$$

(iii) $f(n) = \binom{n+1}{k+1}$ für eine feste Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Lösung. Diese Differenz ergibt sich direkt aus der definierenden Beziehung der Binomialkoeffizienten (Pascalsches Dreieck).

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= \binom{n+2}{k+1} - \binom{n+1}{k+1}\\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= \Delta\left(\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{(k+1)^{\underline{k+1}}}\right) = \frac{1}{(k+1)!}\Delta((n+1)^{\underline{k+1}})\\ &= \frac{1}{(k+1)!}(k+1)(n+1)^{\underline{k}} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

(iv) $f(n) = \frac{n^4}{n^{\underline{4}}}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}(\Delta f)(n) &= \frac{(n+1)^3}{n^{\underline{3}}} - \frac{n^3}{(n-1)^{\underline{3}}}\\ &= \frac{(n+1)^3(n-3) - n^4}{n^{\underline{4}}}\\ &= -\frac{6n^2+8n+3}{n^{\underline{4}}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2 (Summation). (8 Punkte)

Bestimme die diskrete Stammfunktion s zu k^3, also $s(n) = \sum_{0\leq k<n} k^3$, in folgenden Schritten:

(i) Stelle die zugehörige Differenzengleichung auf.

Lösung. $(\Delta s)(n) = n^3$, $s(0) = 0$. ◯

(ii) Verwende den Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ zur Lösung der Differenzengleichung mit Unbekannten a, b, c, d, e und bestimme damit die Summe.

[Vorüberlegungen zeigen, daß, wenn die Lösung ein Polynom ist, dann höchstens ein solches, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 \leq s(n) \leq n^4$ gilt.]

Lösung. Vorüberlegung: Sei $s(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k n^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ ein Polynom mit $a_N \neq 0$, das die Gleichung löst. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$0 \leq s(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \leq n^3 \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n^4, \quad \text{also} \quad 0 \leq \frac{s(n)}{n^4} \leq 1.$$

Notwendigerweise ist $a_N > 0$, da sonst $s(n)$ für große n negativ würde. Aber für geeignete Konstanten $n_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{s(n)}{n^4} = \sum_{k=0}^{N} a_k n^{k-4} > \frac{1}{2} a_N n^{N-4}$ für alle $n \geq n_0$, falls $N > 4$ ist. Also kann $s(n)$ höchstens Grad 4 haben.

Mit dem Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} n^3 = (\Delta s)(n) &= a(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b(3n^2 + 3n + 1) + c(2n + 1) + d \\ &= 4an^3 + (6a + 3b)n^2 + (4a + 3b + 2c)n + a + b + c + d \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da das für alle n gelten soll, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 1 &= 4a, \\ 0 &= 6a + 3b, \\ 0 &= 4a + 3b + 2c, \\ 0 &= a + b + c + d. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = 0$. Aus $s(n) = 0$ folgt $e = 0$. Dann gilt: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2$. ◯

Und jetzt noch einmal von vorn mit einem anderen Verfahren: Wir wollen dazu $k^3 = fk^{\underline{3}} + gk^{\underline{2}} + hk^{\underline{1}} + j$ mit geeigneten f, g, h, j schreiben.

(iii) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ durch Einsetzen geeigneter Werte für k. [Zum Beispiel $k = 0$ liefert die Gleichung $0 = f \cdot 0 + g \cdot 0 + h \cdot 0 + j, \ldots$]

Lösung. Wir setzen die Werte $k = 0, 1, 2, 3$ ein und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= j \\ 1 &= h + j \\ 8 &= 2g + 2h + j \\ 27 &= 6f + 6g + 3h + j. \end{aligned}$$

Dieses hat die eindeutige Lösung $f = 1$, $g = 3$, $h = 1$, $j = 0$. $\bigcirc$

(iv) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ durch Koeffizientenvergleich.

Lösung. Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} k^3 &= f k^{\underline{3}} + g k^{\underline{2}} + h k^{\underline{1}} + j \\ &= f k(k-1)(k-2) + g k(k-1) + hk + j \\ &= f k^3 + (-3f + g)k^2 + (2f - g + h)k + j \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Der Koeffizientenvergleich liefert nun

$$\begin{aligned} 1 &= f, \\ 0 &= -3f + g, \\ 0 &= 2f - g + h, \\ 0 &= j. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $f = 1$, $g = 3$, $h = 1$, $j = 0$. Also gilt

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k. \qquad \bigcirc$$

(v) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Stirlingzahlen.

Lösung. Aus der Vorlesung wissen wir schon, dass $k^\ell = \sum_{0 \le i \le \ell} \left\{ {\ell \atop i} \right\} k^{\underline{i}}$ gilt mit den Stirling-Zahlen 2. Art $\left\{ {\ell \atop i} \right\}$. Also ist $f = \left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1$, $g = \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$, $h = \left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$ und $j = \left\{ {3 \atop 0} \right\} = 0$. $\bigcirc$

(vi) Verwende dies, um s zu bestimmen.

Lösung. Wegen $\Delta(n^{\underline{k}}) = k n^{\underline{k-1}}$ ist $\frac{1}{k} n^{\underline{k}}$ eine Stammfunktion von $n^{\underline{k-1}}$.

Also folgt mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{0\le k<n} k^3 \\
&= \sum_{0\le k<n} \left(k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k\right) \\
&= \sum_{0\le k<n} k^{\underline{3}} + \sum_{0\le k<n} 3k^{\underline{2}} + \sum_{0\le k<n} k \\
&= \frac{1}{4}n^{\underline{4}} - \frac{1}{4}0^{\underline{4}} + n^{\underline{3}} - 0^{\underline{3}} + \frac{1}{2}n^{\underline{2}} + \frac{1}{2}0^{\underline{2}} \\
&= \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{1}{4}n(n-1)\left((n-2)(n-3) + 4(n-2) + 2\right) \\
&= \frac{1}{4}n^2(n-1)^2. \qquad \bigcirc
\end{aligned}$$

Bleibt eine kleine Kuriosität:

(vii) Vergleiche Dein Ergebnis mit $\left(\sum_{0\le k<n} k\right)^2$.

Lösung. Bekanntlich gilt $\sum_{0\le k<n} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ (dies entspricht der Gleichung $\Delta(n^{\underline{2}}) = 2n$). Also gilt

$$\left(\sum_{0\le k<n} k\right)^2 = \sum_{0\le k<n} k^3. \qquad \bigcirc$$

Aufgabe 3.3 (Summation). (4 Punkte)

Sei $f(n) = \frac{n\left(11n^2+48n+49\right)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(i) Zeige $\Delta f(n) = \frac{3}{n^2+5n+4}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\Delta f(n) &= \frac{(n+1)(11(n+1)^2 + 48(n+1) + 49)}{6(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{n(11n^2+48n+49)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(11n^2+70n+108)(n+1)^2 - (11n^3+48n^2+49n)(n+4)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11n^4+92n^3+259n^2+286n+108 - (11n^4+92n^3+241n^2+196n)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{18n^2+90n+108}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{18(n+2)(n+3)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{3}{n^2+5n+4}. \qquad \bigcirc
\end{aligned}$$

(ii) Berechne

$$\sum_{0\le k<n} \frac{3}{k^2+5k+4}.$$

Lösung. Wegen (i) gilt mit dem Hauptsatz

$$\sum_{0\le k<n} \frac{3}{k^2+5k+4} = f(n) - f(0) = \frac{n(11n^2+48n+49)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}. \qquad \bigcirc$$

(iii) Zeige $\frac{3}{k^2+5k+4} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}$ und bestimme mit dieser Information nochmal

$$\sum_{0\le k<n} \frac{3}{k^2+5k+4}.$$

Lösung. Die erste Behauptung kann man natürlich einfach nachrechnen, aber wenn man den Nenner faktorisiert, kann man auf eine solche Formel mit folgendem Ansatz kommen: $\frac{3}{(k+1)(k+4)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+4}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Die rechte Seite ergibt $\frac{a(k+4)+b(k+1)}{(k+1)(k+4)} = \frac{(a+b)k+4a+b}{(k+1)(k+4)}$. Da dies für alle $k \in \mathbb{Z}$ gelten soll, bekommt man durch Koeffizientenvergleich $a+b=0$ und $4a+b=3$, also $a=1$ und $b=-1$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le k<n} \frac{3}{k^2+5k+4} = \sum_{0\le k<n} \frac{1}{k+1} - \sum_{0\le k<n} \frac{1}{k+4} \\
&= \sum_{0\le k<n} \frac{1}{k+1} - \sum_{3\le k<n+3} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\
&= \frac{11(n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+3) - 6(n+1)(n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{11(n^3+6n^2+11n+6) - 6(n^2+5n+6) - 6(n^2+4n+3) - 6(n^2+3n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(11n^2+48n+49)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}. \qquad \bigcirc
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4 (Differenzengleichung). (4 Punkte)

Löse die Differenzengleichungen

$$(E^2 - E - I)f = 0, \qquad f(0) = 1, \quad f(1) = 1.$$

Lösung. Wir machen den Ansatz $f(n) = \lambda^n$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
Ef(n) &= \lambda^{n+1} = \lambda f(n), \\
E^2 f(n) &= E(\lambda f)(n) = \lambda^2 f(n).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert

$$0 = E^2 f(n) - Ef(n) - f(n) = (\lambda^2 - \lambda - 1)f(n)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da f sicherlich nicht identisch 0 ist, können wir durch $f(n)$ dividieren und erhalten die charakteristische Gleichung $0 = \lambda^2 - \lambda - 1$, woraus wir nach der bekannten Formel für quadratische Gleichungen die zwei Lösungen $\lambda_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, das ist der *goldene Schnitt*, und $\lambda_2 = \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erhalten. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist also $f(n) = a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten bestimmen wir aus den Anfangswerten $1 = f(0) = a + b$ und $1 = f(1) = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, d.h. $b = 1 - a$, und daraus folgt $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{\varphi}{\varphi - \overline{\varphi}}$ und $b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{\overline{\varphi}}{\varphi - \overline{\varphi}}$.

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi - \overline{\varphi}} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Wie ihr sicher bemerkt habt, sind das die um eins verschobenen Fibonacci-Zahlen, $f(n) = F_{n+1}$ und die Formel kennen wir schon aus Aufgabe 3.1 vom Wintersemester. ○

Aufgabe 3.5 (Operatoren). (4 Punkte)

Der Multiplikationsoperator M multipliziert zwei Funktionen punktweise, also $M(f, g) = f \cdot g$ mit $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$.

(i) Formuliere die zweite Aussage von Satz 6.14 ($\Delta(f \cdot g)(n) = (\Delta f)(n)g(n+1) + f(n)(\Delta g)(n)$) auf Operatorenebene (mit $M, \ldots$).

Lösung. $\Delta \circ M = M(\Delta, E) + M(I, \Delta)$. ○

(ii) Zeige $\Delta \circ M = M(I, \Delta) + M(\Delta, I) + M(\Delta, \Delta)$. Argumentiere sorgfältig auf den drei Ebenen (Elemente, Funktionen von Elementen, Operatoren auf Funktionen).

Lösung. ∘ Auf Elementebene: Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} &(\Delta \circ M)(f, g)(n) \\ &= \Delta(f \cdot g)(n) \\ &= (\Delta f)(n)g(n+1) + f(n)(\Delta g)(n) \\ &= (\Delta f)(n)((\Delta g)(n) + g(n)) + f(n)(\Delta g)(n) \\ &= f(n)(\Delta g)(n) + (\Delta f)(n)g(n) + (\Delta f)(n)(\Delta g)(n) \\ &= M(If, \Delta g)(n) + M(\Delta f, Ig)(n) + M(\Delta f, \Delta g)(n). \end{aligned}$$

Da dies für alle Elemente gilt, gilt die Gleichung für die Funktionen. Da dies wiederum für alle Funktionen gilt, gilt es für die Operatoren.

- Auf Funktionenebene: Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(\Delta \circ M)\,(f,g) &= \Delta(f \cdot g)\\ &= (\Delta f)E(g) + f(\Delta g)\\ &= (\Delta f)(\Delta + I)(g) + f \cdot \Delta g\\ &= f \cdot (\Delta g) + (\Delta f) \cdot g + (\Delta f) \cdot (\Delta g)\\ &= M(If, \Delta g) + M(\Delta f, Ig) + M(\Delta f, \Delta g).\end{aligned}$$

  Da dies für alle Funktionen gilt, gilt die Gleichung für die Operatoren.

- Auf Operatorenebene: Wegen $\Delta = E - I$ gilt $E = \Delta + I$ und mit (i) folgt

$$\begin{aligned}\Delta \circ M &= M(\Delta, \Delta + I) + M(I, \Delta)\\ &= M(I, \Delta) + M(\Delta, I) + M(\Delta, \Delta).\end{aligned}$$ ○

***Aufgabe 3.6** (Quizfrage). (0+2 Punkte)

Bestimme $Q_{1\,000\,000}$, wobei für $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n = \sum_{0 \le k \le 2^n} \binom{2^n - k}{k} (-1)^k$$

ist.

Lösung. Die Aufgabe ist Problem 2 in Kapitel 5 in Graham, Knuth & Patashnik (1994). Dort wird auch ausführlich besprochen, wie man die Lösung findet. Wir schreiben hier nur auf, was nach allen Vorüberlegungen zu beweisen ist.

Wir betrachten zunächst die Summe $R_N := \sum_{0 \le k \le N} \binom{N-k}{k}(-1)^k$ für allgemeine $N \in \mathbb{N}$. Wir zerlegen darin

$$\binom{N-k}{k} = \binom{N-k-1}{k} + \binom{N-k-1}{k-1} = \binom{N-1-k}{k} + \binom{N-2-(k-1)}{k-1}$$

mit dem Hintergedanken, dass wir so auf Ausdrücke mit $N-1$ oder $N-2$ anstelle von N kommen und dadurch R_N mit R_{N-1} und R_{N-2} verbinden können.

$$
\begin{aligned}
R_N &= \sum_{0\le k\le N-1} \binom{N-k}{k}(-1)^k + \underbrace{\binom{0}{N}(-1)^N}_{=0} \\
&= \sum_{0\le k\le N-1} \binom{N-1-k}{k}(-1)^k + \sum_{0\le k\le N-1} \binom{N-1-k}{k-1}(-1)^k \\
&= \sum_{0\le k\le N-1} \binom{N-1-k}{k}(-1)^k + \sum_{0\le \ell\le N-2} \binom{N-2-\ell}{\ell}(-1)^{\ell+1} \\
&= \sum_{0\le k\le N-1} \binom{N-1-k}{k}(-1)^k - \sum_{0\le \ell\le N-2} \binom{N-2-\ell}{\ell}(-1)^{\ell} \\
&= R_{N-1} - R_{N-2}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für $N \ge 3$

$$R_N = (R_{N-2} - R_{N-3}) - R_{N-2} = -R_{N-3},$$

d.h. $R_N = R_{N-6}$ für $N \ge 6$, die Folge hat also eine Periode von 6. Nun ist $Q_n = R_{2^n}$, wir müssen uns also überlegen, was $2^{1\,000\,000} \bmod 6$ ist. Modulo 3 ist das mit $\varphi(3) = 2$ klar: $2^{1\,000\,000} \equiv_3 2^0 = 1$. Und modulo 2 kommt mit $2 \equiv_2 0$ sofort 0 heraus. Mit dem chinesischen Restsatz finden wir aus $x \equiv_2 0$ und $x \equiv_3 1$ schnell $x \equiv_6 4$, und so ist also $2^{1\,000\,000} \equiv_6 4$. [Natürlich geht das auch „zu Fuß“: Es gilt

$$2^0 = 1 \equiv 1 \bmod 6, \quad 2^1 = 2 \equiv 2 \bmod 6, \quad 2^2 = 4 \equiv 4 \bmod 6, \quad 2^3 = 8 \equiv 2 \bmod 6,$$

woraus induktiv folgt, dass für $n > 0$

$$2^n \equiv_6 \begin{cases} 2, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 4, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist. Da $1\,000\,000$ gerade ist, folgt $2^{1\,000\,000} \equiv_6 4$.] Nun ist also

$$Q_{1\,000\,000} = R_4 = \binom{4}{0} - \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = -1. \qquad \bigcirc$$

Literatur

R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH & O. PATASHNIK (1994). *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, Reading MA, 2nd edition. First edition 1989.