2. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

PETER SCHEIBLECHNER & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 2.1 (Zweifach Abzählen). (4 Punkte)

Zeige

$$\sum_{0 \le i \le n} i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}$$

durch zweifaches Abzählen von Paaren $(i, (j, J))$, wobei $0 \le i \le n$ und $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, $j \in J$ sowie $i = \# J$ gilt.

Lösung. Für jedes $0 \le i \le n$ gibt es $i \binom{n}{i}$ Paare (j, J) mit $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, $j \in J$ und $i = \# J$. Für jedes Paar (j, J) mit $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, $j \in J$ gibt es genau ein $0 \le i \le n$ mit $i = \# J$. Also

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le i \le n} i \binom{n}{i} &= \sum_{0 \le i \le n} \# \left\{ (j, J) \,\middle|\, J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, j \in J, i = \# J \right\} \\
&= \# \left\{ (i, (j, J)) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le i \le n, \\ J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, j \in J, \end{array} i = \# J \right\} \\
&= \sum_{J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, j \in J} \# \left\{ i \,\middle|\, 0 \le i \le n, i = \# J \right\} \\
&= \sum_{J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, j \in J} 1.
\end{aligned}$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}_{<n}$ gibt es 2^{n-1} Teilmengen $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$ mit $j \in J$. Also

$$\sum_{J \subseteq \mathbb{N}_{<n}, j \in J} 1 = \sum_{0 \le j < n} 2^{n-1} = n 2^{n-1}. \qquad \bigcirc$$

Aufgabe 2.2 (Einsen und Nullen). (4 Punkte)

Wie viele Einsen braucht man für eine Liste der Binärdarstellungen aller natürlichen Zahlen kleiner als 2^n? Beweise dies

(i) mit Hilfe einer Bijektion. (Nullen?)

Lösung. Jede Eins in dieser Liste ist eindeutig bestimmt durch die Zahl k und die Position i, an der die fragliche Eins in der Binärdarstellung auftritt. Die Anzahl der Einsen ist also die Anzahl der Menge der Paare (k, i) mit $0 \le k < 2^n$ und $0 \le i < n$, wo die i-te Binärziffer von k eine Eins ist. Wenn wir nun all die Zahlen kleiner als 2^n mit n Ziffern darstellen also von links mit Nullen auffüllen, dann können wir doch probeweise mal überall Nullen gegen Einsen und Einsen gegen Nullen tauschen. Dabei geht k in $2^n - 1 - k$ über. Betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N}_{<2^n} \times \mathbb{N}_{<n} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{<2^n} \times \mathbb{N}_{<n}, \\ (k,i) & \longmapsto & (2^n - 1 - k, i). \end{array}$$

Sie ist offensichtlich eine Bijektion, es gilt $f \circ f = \mathrm{id}$. Und f bildet eine Position mit einer Eins auf eine Position mit einer Null ab und umgekehrt! Die Menge der Positionen (k,i), an denen sich eine Eins findet, ist also gleich groß wie die Menge der Positionen, an denen sich eine Null findet. Und beide Mengen zusammen ergeben die Menge $\mathbb{N}_{<2^n} \times \mathbb{N}_{<n}$. Damit ist die Anzahl der Einsen gerade halb so groß wie deren Anzahl: wir brauchen also $\frac{n2^n}{2}$ Einsen. ○

Lösung. Jede Eins in dieser Liste ist eindeutig bestimmt durch die Stelle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ in der Binärdarstellung, an der die Eins steht, und die Menge $J \subseteq N_{<n} \setminus \{i\} =: M_i$ der Stellen, an denen die anderen Einsen stehen. Es gibt offensichtlich eine Bijektion zwischen M_i und $\mathbb{N}_{<n-1}$, also gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Einsen und der Menge $\mathbb{N}_{<n} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{<n-1})$. Also braucht man $n2^{n-1}$ Einsen. ○

(ii) mit Hilfe der Regel vom zweifachen Abzählen.

Lösung. Die gesuchte Anzahl e ist

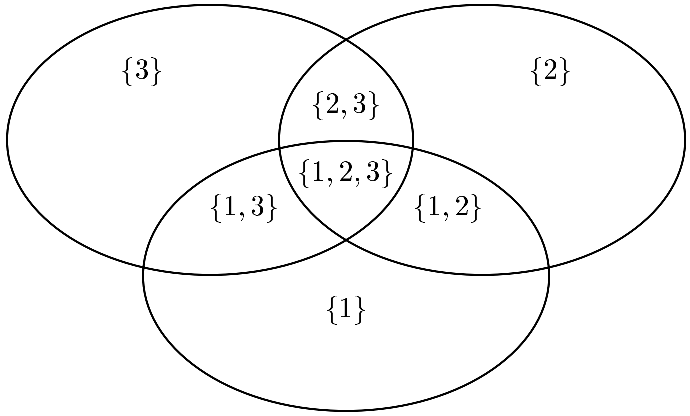
$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \# \{(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \{0,1\}^n \mid (b_0, \dots, b_{n-1}) \text{ enthält } i \text{ Einsen}\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \# \{J \subseteq \mathbb{N}_{<n} \mid \#J = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \\ &\overset{2.1}{=} n2^{n-1} \end{aligned}$$

○

Aufgabe 2.3 (Inklusion / Exklusion). (2 Punkte)

Zeichne ein Venn-Diagramm für die In- / Exklusion mit drei Mengen A_1, A_2, A_3. Markiere darin jeden der sieben Bereiche mit der zugehörigen Indexmenge $K \subseteq \{1,2,3\}$, $K \neq \emptyset$.

Lösung.



$\bigcirc$

Aufgabe 2.4 (Quadraftfreie Zahlen zählen). (10 Punkte)

Wir wollen zählen, wie viele natürliche Zahlen kleiner N quadratfrei sind. Eine Zahl n ist *quadratfrei*, wenn keine Primzahl sie zweimal teilt, oder, mit anderen Worten, wenn in der Primfaktorzerlegung keine Primzahl doppelt auftritt. Also ist 6 quadratfrei, aber 12 nicht.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\mathrm{QF}^{(N)} := \{n \in \mathbb{N}_{<N} \,|\, n \text{ quadratfrei}\},$$
$$M_p^{(N)} := \{n \in \mathbb{N}_{<N} \,|\, p^2 \mid n\}$$

für $p > 1$.

(i) Zeige: Die Zahlen in $M_p^{(N)}$ sind nicht quadratfrei. (Also $M_p^{(N)} \subseteq \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{QF}^{(N)}$.)

Lösung. Für $n \in M_p^{(N)}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mp^2 = n$. Ist q ein Primteiler von p, so existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $p = rq$, also $n = mp^2 = mr^2q^2$, d.h. n ist nicht quadratfrei. $\bigcirc$

(ii) Zeige: Die Menge $\mathrm{QV} = \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{QF}^{(N)}$ der nicht quadratfreien Zahlen kleiner N ist gerade die Vereinigung der Mengen $M_p^{(N)}$ über die Primzahlen p kleiner $\sqrt{N}$.

Lösung. Wegen (i) ist die Vereinigung $V := \bigcup_{p<\sqrt{N} \text{ prim}} M_p^{(N)}$ enthalten in QV. Sei umgekehrt $n \in \mathrm{QV}$. Dann ist n nicht quadratfrei, d.h. es existiert eine Primzahl p mit $p^2 \mid n$, also $n \in M_p^{(N)}$. Aus $p^2 \mid n$ folgt $p^2 \leq n$ und wegen $n < N$ gilt $p < \sqrt{N}$, also $n \in V$. $\bigcirc$

(iii) Bestimme die Anzahlen von $M_2^{(N)}, M_3^{(N)}, M_5^{(N)}$ sowie $M_{2\cdot 3}^{(N)}, M_{2\cdot 5}^{(N)}, M_{3\cdot 5}^{(N)}$ und $M_{2\cdot 3\cdot 5}^{(N)}$ für $N = 30, 80, 200, 900, 10\,000$.

Lösung. Die Zahlen in $M_p^{(N)}$ sind gerade die Vielfachen von p^2, die kleiner als N sind, also $0, p^2, 2p^2, \ldots, kp^2$ mit $k < \frac{N}{p^2}$ maximal. Daraus folgt $\#M_p^{(N)} = \lceil \frac{N}{p^2} \rceil$. In der folgenden Tabelle sind die gefragten Werte von $\#M_p^{(N)}$ aufgelistet.

	30	80	200	900	10 000
2	8	20	50	225	2 500
3	4	9	23	100	1 112
5	2	4	8	36	400
6	1	3	6	25	278
10	1	1	2	9	100
15	1	1	1	4	45
30	1	1	1	1	12

○

(iv) Bestimme die Anzahl von $\mathrm{QF}^{(N)}$ für $N = 30, 80, 200, 900, 10\,000, 1\,000\,000$.

Lösung. Für zueinander teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ (also insbesonder für verschiedene Primzahlen $p, q \in \mathbb{N}$) gilt $M_p^{(N)} \cap M_q^{(N)} = M_{pq}^{(N)}$, denn $p^2 \mid n,\ q^2 \mid n \iff (pq)^2 \mid n$. Seien $p_1 < \cdots < p_n$ alle Primzahlen kleiner als $\sqrt{N}$. Dann folgt mit Teil (ii) und dem Prinip der Exklusion und Inklusion

$$\begin{aligned}
\#\,\mathrm{QV} = \#\left(\bigcup_{p<\sqrt{N}\,\mathrm{prim}} M_p^{(N)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \#(M_{p_1}^{(N)} \cap \cdots \cap M_{p_k}^{(N)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \#M_{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}^{(N)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left\lceil \frac{N}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rceil .
\end{aligned}$$

Also gilt für $N = 30$: Alle Primzahlen kleiner als $\sqrt{30}$ sind $2, 3, 5$. Also

$$\begin{aligned}
\#\,\mathrm{QV} &= \#M_2^{(30)} + \#M_3^{(30)} + \#M_5^{(30)} \\
&\quad - \#M_{2\cdot 3}^{(30)} - \#M_{2\cdot 5}^{(30)} - \#M_{3\cdot 5}^{(30)} \\
&\quad + \#M_{2\cdot 3\cdot 5}^{(30)} \\
&= 8 + 4 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 12,
\end{aligned}$$

d.h. $\#QF^{(30)} = 30 - \#\,\mathrm{QV} = 18$. Analog berechnet man die anderen Werte, die in der folgenden Tabelle aufgeführt sind.

N	30	80	200	900	10 000	1 000 000
$\mathrm{QF}^{(N)}$	18	50	122	547	6 083	607 926

○

(v) Zeige

$$1-\sum_{p_1\in I}\frac{1}{p_1^2}+\sum_{\{p_1,p_2\}\subseteq I}\frac{1}{p_1^2p_2^2}\mp\cdots=\prod_{p\in I}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

für die Menge I der Primzahlen kleiner als $\sqrt{N}$. Die linke Seite kann formal geschrieben werden als

$$\sum_{0\le k\le \#I}\sum_{K\in\binom{I}{k}}(-1)^k\prod_{p\in K}\frac{1}{p^2},$$

wobei $\binom{I}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von I bezeichnet.

Lösung. Wird die rechte Seite der behaupteten Gleichung ausmultipliziert, so bekommt man jeden Summanden, indem man aus jedem Faktor entweder die 1 oder $-\frac{1}{p^2}$ nimmt und aufmultipliziert. Ordnet man die Summanden nach der Anzahl k der Terme $-\frac{1}{p^2}$, die man für das Produkt verwendet hat, so erhält man für jedes $0\le k\le \#I$ einen Summanden für jede k-elementige Teilmenge von I, also

$$\prod_{p\in I}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\sum_{k=0}^{\#I}\sum_{K\in\binom{I}{k}}\prod_{p\in K}\left(-\frac{1}{p^2}\right)=\sum_{k=0}^{\#I}\sum_{K\in\binom{I}{k}}(-1)^k\prod_{p\in K}\frac{1}{p^2}.\qquad\bigcirc$$

Lösung. Durch Induktion nach $\#I$ zeigen wir, dass die beiden Ausdrücke

$$a_I=\sum_{0\le k\le \#I}\sum_{K\in\binom{I}{k}}(-1)^k\prod_{p\in K}\frac{1}{p^2}\quad\text{und}$$
$$b_I=\prod_{p\in I}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

für alle endlichen Indexmengen I (die nur aus Primzahlen bestehen) gleich sind.

Induktionsanfang $\#I=0$: Hier ist $I=\emptyset$ die leere Menge. Die äußere Summe in $a_\emptyset$ läuft genau über $k=0$ und die innere über $K=\emptyset$ als einzige nullelementige Teilmenge der leeren Menge. Dann ist $(-1)^k=1$ und das Produkt über die Elemente von K ist leer und hat daher den Wert 1. Es bleibt: $a_\emptyset=1\cdot 1=1$. Andererseits ist $b_\emptyset=1$, weil es sich hier auch um ein leeres Produkt handelt.

Induktionsschritt $\#I>0$: Wir nehmen hier an, dass $a_J=b_J$ für alle (erlaubten) Mengen J mit weniger Elementen als I bereits gezeigt ist. Wir wollen zeigen, dass $a_I=b_I$ gilt.

Zuerst wählen wir ein beliebiges Element $q\in I$. (Zum Beispiel das größte.) Setzen wir $J=I\setminus\{q\}$, so ist $I=J\uplus\{q\}$. Wir beobachten zuerst

$b_I = b_J \cdot \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)$. Davon ausgehend kommen wir zu folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
b_I &= b_J \cdot \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \\
&= a_J \cdot \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \\
&= a_J + a_J \cdot \frac{-1}{q^2} \\
&= \sum_{0 \le k \le \#J} \sum_{K \in \binom{J}{k}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} + \sum_{0 \le k \le \#J} \sum_{K \in \binom{J}{k}} (-1)^{k+1} \frac{1}{q^2} \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{0 \le k \le \#J} \sum_{\substack{K \in \binom{I}{k}, \\ q \notin K}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} + \sum_{1 \le k+1 \le \#J+1} \sum_{\substack{K \in \binom{I}{k+1}, \\ q \in K}} (-1)^{k+1} \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{0 \le k \le \#I} \sum_{\substack{K \in \binom{I}{k}, \\ q \notin K}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} + \sum_{0 \le k \le \#I} \sum_{\substack{K \in \binom{I}{k}, \\ q \in K}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{0 \le k \le \#I} \sum_{K \in \binom{I}{k}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2} \\
&= a_I .
\end{aligned}$$

Abschließend bemerken wir, dass a_I entsprechend der Zerlegung von $\binom{I}{k}$ in Mengen ohne und Mengen mit q aufgespalten wurde. ○

Bemerkung: Der Grenzwert des Produktes ist wohl bekannt, für das Inverse gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{\substack{p \text{ prim}, \\ p < k}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \zeta(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934\ldots$$

(vi) Nähere die Anzahl von $M_p^{(N)}$ durch $\frac{N}{p^2}$ an und finde einen Näherungsausdruck für die Anzahl von $\mathrm{QF}^{(N)}$.

Lösung. Mit den Bezeichnungen von Teil (iv) sei $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_k} \in [0,1)$ definiert durch $\left\lceil \frac{N}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rceil = \frac{N}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_k}^2} + \varepsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ für alle Tupel $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\#\,\mathrm{QF}^{(N)} &= N - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left\lceil \frac{N}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2} \right\rceil \\
&= N - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left(\frac{N}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2} + \varepsilon_{i_1,\dots,i_k} \right) \\
&= N - N\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \frac{1}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2} \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_k} \\
&= N - N\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_k}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\#\,\mathrm{QF}^{(N)} &\approx 1 - \prod_{p<\sqrt{N}\ \mathrm{prim}} \left(1-\frac{1}{p^2}\right) \\
&\longrightarrow 1 - \frac{1}{\zeta(2)} = 1 - \frac{6}{\pi^2} \approx 0.3920728984.
\end{aligned}$$

Lax formuliert: knapp 40% aller Zahlen sind quadratfrei. ○

Aufgabe 2.5 (Erzeugende Funktionen). (2 Punkte)

Michael kleidet sich neu ein. Er möchte zwei bis drei Hosen, ein oder zwei Jacken, vielleicht einen Pulli, fünf, sechs oder acht T-Shirts und einen Mantel haben. Am Abend stellt er fest, dass er genau 12 Teile gekauft hat.

(i) Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

Lösung. Es geht um die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung aus der Menge {Hose, Jacke, Pulli, T-Shirt, Mantel}, wobei folgende Anzahlen möglich sind:

Hose:	2,3
Jacke:	1,2
Pulli:	0,1
T-Shirt:	5,6,8
Mantel:	1

Nach Satz 6.11 aus Brill (2001) ist die erzeugende Funktion dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned}
&(x^2+x^3)(x+x^2)(1+x)(x^5+x^6+x^8)x \\
&= x^9 + 4x^{10} + 6x^{11} + 5x^{12} + 4x^{13} + 3x^{14} + x^{15}.
\end{aligned}$$

Also gibt es für 12 Teile genau 5 Möglichkeiten. ○

(ii) Wieviele Möglichkeiten gab es insgesamt und was ist also die Wahrscheinlichkeit für genau 12 Teile?

Lösung. Aus der erzeugenden Funktion liest man durch Einsetzen von 1 die Gesamtzahl der Möglichkeiten als

$$1 + 4 + 6 + 5 + 4 + 3 + 1 = 24.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit für 12 Teile $5/24 \approx 0.2083$. ○

Literatur

MANFRED BRILL (2001). *Mathematik für Informatiker*. Hanser. URL `http://www.matheinfo.de/`.