

1. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

PETER SCHEIBLECHNER, MARTIN LOTZ, VOLKER KRUMMEL & MICHAEL NÜSKEN

Aufgabe 1.1 (Fingerübungen).

(0 Punkte)

- (i) Wie oft klingelt es, wenn an einem Tisch mit zehn Personen jeder mit jedem anstößt?

Lösung. Da es beim Anstoßen nicht auf die Reihenfolge der Partner ankommt, klingelt es so oft, wie es zweielementige Teilmengen der Menge der zehn Personen gibt, also $\binom{10}{2} = 45$ mal.

- (ii) Auf wieviele Arten können fünf Herren und fünf Damen sich auf fünf Tanzpaare aufteilen?

Lösung. Werden die Herren in beliebiger Reihenfolge angeordnet, so entspricht die Zahl der Paare der Anzahl der Anordnungen der fünf Damen, also $5! = 120$.

- (iii) Auf wieviele Arten können zehn Schachspieler sich auf fünf Parteien verteilen?

Lösung. Für die erste Partie gibt es $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten, für die zweite $\binom{8}{2}$, ... für die fünfte $\binom{2}{2}$. Also gibt es mit Beachtung der Reihenfolge der Parteien $\binom{10}{2} \binom{8}{2} \cdots \binom{2}{2}$ Möglichkeiten. Da es $5!$ Möglichkeiten gibt, die Parteien anzuordnen, gibt es ohne Reihenfolge $\binom{10}{2} \binom{8}{2} \cdots \binom{2}{2} / 5! = \frac{10 \cdot 9 \cdots 6}{2^5} = 945$ Möglichkeiten.

- (iv) Auf wieviele Arten können acht Türme auf einem Schachbrett so verteilt werden, dass sie sich nicht gegenseitig bedrohen?

Lösung. Da ein Turm beliebig weit parallel zu den Seiten ziehen kann, darf in jeder Zeile und in jeder Spalte nur ein Turm stehen. Da acht Türme verteilt werden sollen, muss in jeder Spalte/Zeile einer stehen. Die Anzahl der Stellungen entspricht also der Anzahl der Anordnungen der acht Spalten, dh. $8! = 40320$ (da auf einem Schachbrett die Zeilen/Spalten nummeriert sind, werden keine Symmetrien betrachtet).

- (v) Wieviele Möglichkeiten gibt es im Lotto drei Richtige zu haben? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit? [Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist die Anzahl günstige Fälle (wo also das Ereignis eintritt) geteilt durch Anzahl mögliche Fälle (die also überhaupt in Frage kommen).]

Lösung. Durch Ausfüllen des Lottozettels wird eine sechselementige Teilmenge $A \subset \{1, \dots, 49\} =: M$ ausgezeichnet. Für eine dreielementige Teilmenge $S \subset A$ gibt es $\binom{43}{3}$ Ziehungen $B \subset M$ mit $S \subset B$ und $B \cap (A \setminus S) = \emptyset$, da die restlichen drei Zahlen aus $M \setminus A$ mit 43 Elementen gezogen werden. Da es $\binom{6}{3}$ dreielementige $S \subset A$ auszuwählen, gibt es insgesamt $\binom{6}{3} \binom{43}{3} = 246820$ Möglichkeiten für drei Richtige.

Da es insgesamt $\binom{49}{6}$ Ziehungen gibt, ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(3 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765040387.$$

Also ungefähr einmal im Jahr erwarten wir einen Dreier, wenn wir jede Woche eine Tippreihe spielen. \circ

- (vi) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Lotto null Richtige zu haben?

Lösung. Mit obigen Bezeichnungen ist dies die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehung $B \subset M$ disjunkt zu A ist, d.h. es werden 6 Zahlen aus 43 gezogen:

$$P(0 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 0.4359649755$$

\circ

Aufgabe 1.2 (Zweifaches Abzählen).

(0 Punkte)

Zeige

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} = \sum_{J \subset \mathbb{N}_{<n}} 1$$

durch zweifaches Abzählen von Paaren (i, J) , wobei i eine natürliche Zahl kleiner oder gleich n und J eine Menge von natürlichen Zahlen kleiner n ist und $i = \#J$ gilt.

Was ergibt die rechte Seite?

Lösung. Für jede Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_{<n} = \{0, \dots, n-1\}$ gibt es genau eine Zahl $0 \leq i \leq n$ mit $\#J = i$. Für jede Zahl $0 \leq i \leq n$ gibt es $\binom{n}{i}$ Teilmengen $J \subset \mathbb{N}_{<n}$ mit $\#J = i$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} &= \sum_{0 \leq i \leq n} \#\{J \subset \mathbb{N}_{<n} \mid \#J = i\} \\ &= \#\left\{(i, J) \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n, \\ J \subset \mathbb{N}_{<n}, \\ \#J = i \end{array}\right\} \\ &= \sum_{J \subset \mathbb{N}_{<n}} \#\{i \mid \#J = i\} \\ &= \sum_{J \subset \mathbb{N}_{<n}} 1 \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt laut Vorlesung 2^n . Das kann man aber nun auch so sehen:

$$\sum_{J \subset \mathbb{N}_{<n}} 1 = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} 1^i \cdot 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n. \quad \circ$$