[b|d] bernhard dietrich

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 9
Matrikel-Nr.: 6256800 • Übungsgruppe 2

Aufgabe 9.1

Zu zeigen: $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x-a)$

(i)

Für $\mathbb{F}_3$ gilt:

$$\begin{aligned} &= x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &\equiv x^3 - 0x^2 - 1x \bmod 3 \\ &= x^3 - x \end{aligned}$$

Für $\mathbb{F}_5$ gilt:

$$\begin{aligned} &= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x \\ &\equiv x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0x^2 - 1x \bmod 3 \\ &\equiv x^5 - x \end{aligned}$$

Die Annahme ist richtig für $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$.

(ii) Da gelten soll $g \mid f$ gibt es ein $h \in \mathbb{F}_q$, für welches gilt $g \cdot h = f$.

Da $\deg(f) = \deg(g)$, ist h konstant.

Und da $\operatorname{lc}(f) = \operatorname{lc}(g)$, muss $h = 1$ sein.

Somit folgt $g = f$.

(iii) Die Gleichung ist durch den kleinen Satz von Fermat bewiesen, da gemäß Aufgabenstellung davon ausgegangen werden darf, dass q prim ist.

(iv) $a^q = a \cdot \underbrace{a^{q-1}}_{=1 \text{ nach (iii)}} = a \cdot 1 = a$

(v) Da für q prim zuvor gezeigt wurde, dass $a^q = a$, gilt natürlich

auch $f(a) = a^q - a = a - a = 0$. Diese Nullstelle muss das Poylnom also immer teilen,

daher gilt $x - a \mid x^q - x$ immer.

(vi) Jedes $a \in F_q$ ist eine Nullstelle von $x^q - x$. Es gilt also: $\forall a \in F_q : (x-a) \mid (x^q - x)$.

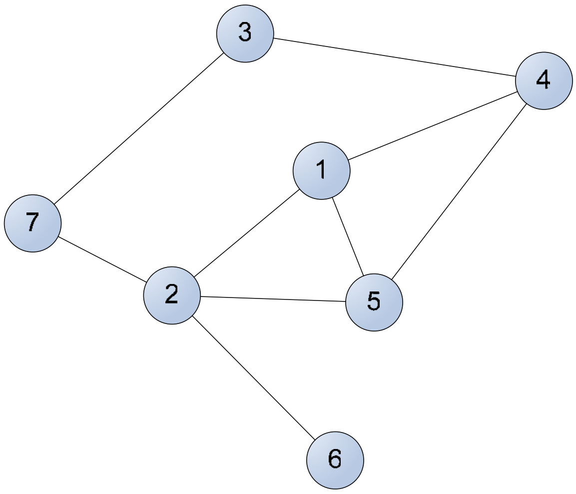
Sei nun $\prod_{a \in F_q} (x-a) = g$ und $x_q - x = f$ so muss natürlich auch gelten $g \mid f$, da alle einzelnen Faktoren Nullstellen des Polynoms sind. Dabei ist die Anzahl der Faktoren $\#(\text{Faktoren von g}) = q = \deg(g)$ und $q = \deg(f) \Rightarrow \deg(g) = \deg(f)$.

$$\operatorname{lc}(g) = \operatorname{lc}\left(\prod_{a \in F_q} (x-a)\right) = 1 = \operatorname{lc}(f)$$

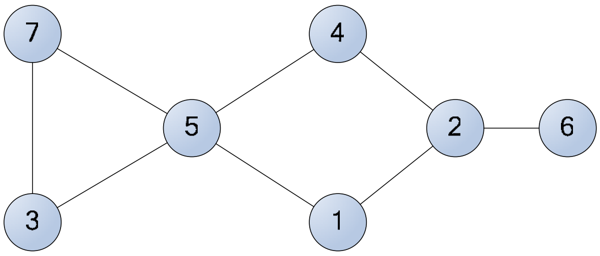
Nach diesen beiden Aussagen und ii muss gelten $g = f$, also $\prod_{a \in F_q} (x-a) = x^q - x$.

Aufgabe 9.2

(i)



(ii)



(iii) Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjanzenzmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 9.3

(i) Eulerkreis:
Nicht möglich, da z.B. $\deg(1) = 3$
Hamiltonkreis:
Der Hamiltonkreis ist: 7, 6, 9, 4, 1, 2, 12, 5, 3, 8, 10, 11, 7

(ii) Eulerkreis:
Nicht möglich, da z.B. $\deg(6) = 3$
Hamiltonkreis:
Es gibt keinen Hamiltonkreis, da ein Knoten drei Nachbarknoten mit dem Grad 2 hat, somit ist ein Hamiltonkreis nicht möglich

(iii) Eulerkreis:
Es gibt einen Eulerkreis, da alle Knoten einen geraden Grad haben.
Hamiltonkreis:
Es gibt keinen Hamiltonkreis, da ein Knoten drei Nachbarknoten mit dem Grad 2 hat, somit ist ein Hamiltonkreis nicht möglich

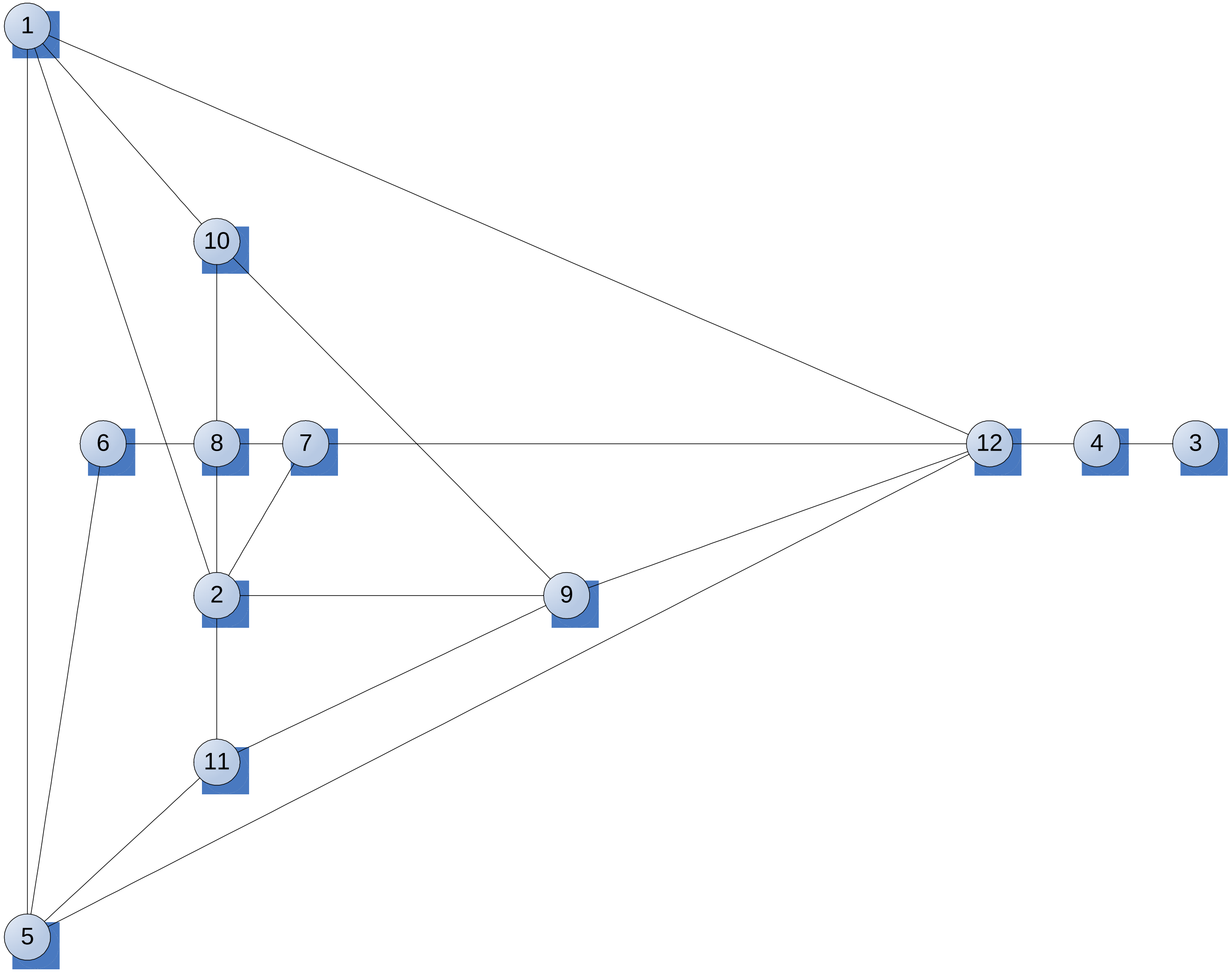
(iv) Eulerkreis:
Es gibt einen Eulerkreis, da alle Knoten einen geraden Grad haben.
Hamiltonkreis:
Der Hamiltonkreis ist: 2, 3, 4, 10, 1, 12, 6, 8, 9, 5, 7, 11, 2

Aufgabe 9.4

Zwei Graphen können nur Isomorph sein, wenn sie jeweils die gleiche Anzahl an Knoten mit einem Grad haben:

	1	2	3	4	5	6
i	1	2	3	4	2	0
ii	0	2	4	1	3	0
iii	0	4	4	2	0	2
iv	1	2	3	4	2	0
v	3	1	1	3	4	0
vi	0	4	4	2	0	2

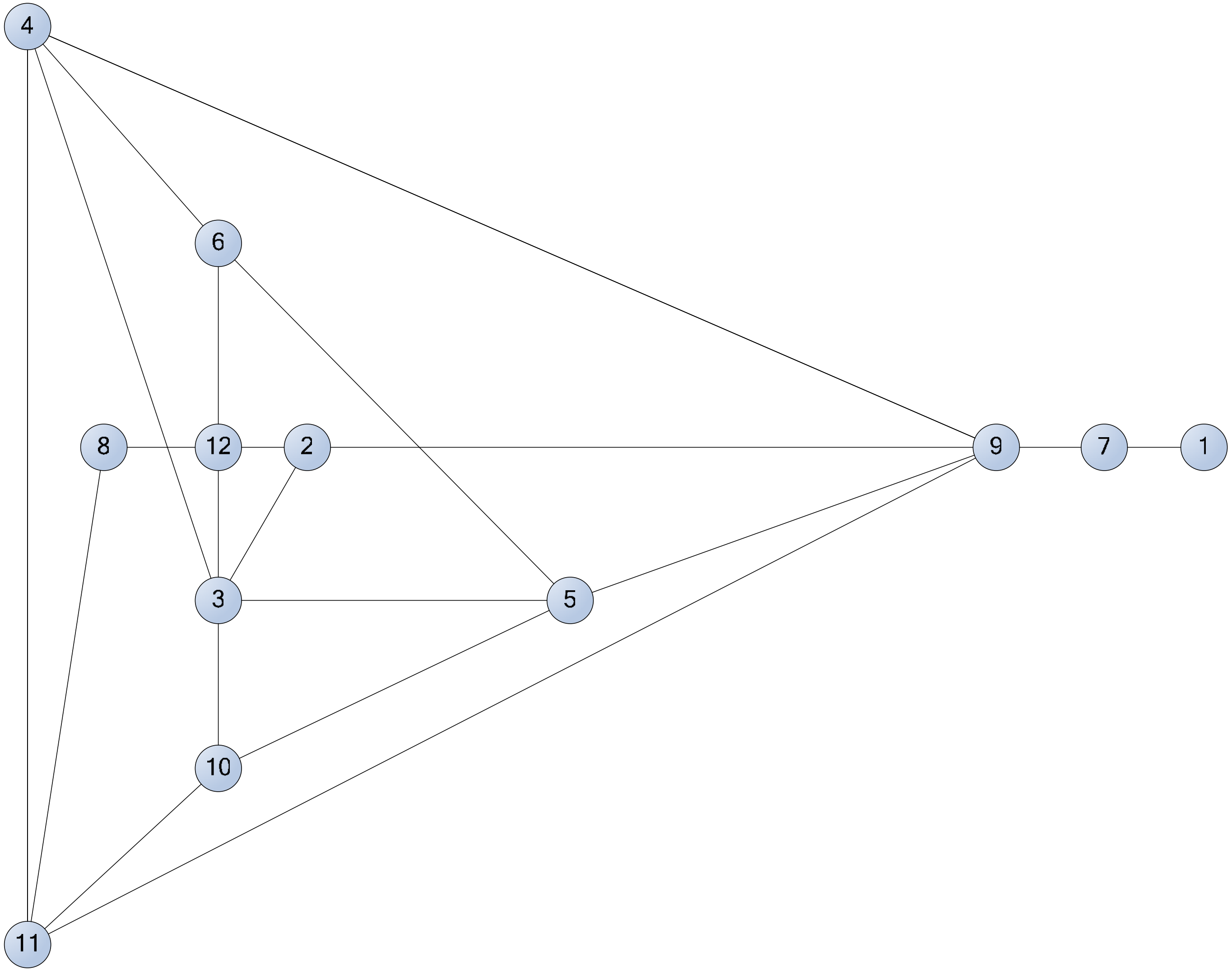
Es kommen also in Frage, i und iv, sowie iii und vi.

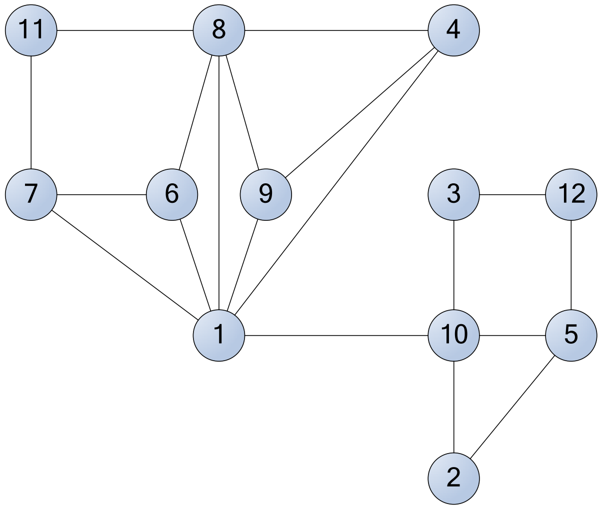


Knotengerade		
	i	**iv**
1	4	1
2	4	3
3	1	5
4	2	4
5	4	4
6	2	3
7	3	2
8	4	2
9	4	5
10	3	3
11	3	4
12	4	4

Der umstrukturierte Graph zeigt es. Die beiden Graphen sind isomorph. Der Isomorphismus ist in der Tabelle angegeben.

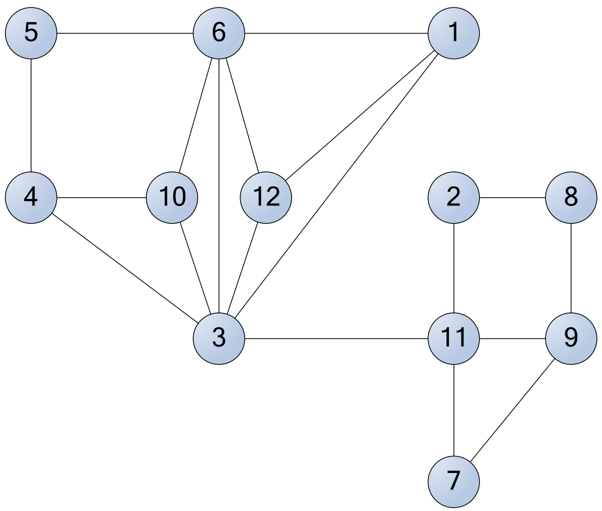
i	≅	iv
1	↦	4
2	↦	3
3	↦	1
4	↦	7
5	↦	11
6	↦	8
7	↦	2
8	↦	12
9	↦	5
10	↦	6
11	↦	10
12	↦	9





Knotengerade		
	iii	**vi**
1	6	3
2	2	2
3	2	6
4	3	4
5	3	2
6	3	6
7	4	2
8	6	2
9	3	3
10	4	3
11	2	4
12	2	3

Der umstrukturierte Graph zeigt es. Die beiden Graphen sind isomorph. Der Isomorphismus ist in der unteren Tabelle angegeben.



i	≅	**iv**
1	$\mapsto$	3
2	$\mapsto$	7
3	$\mapsto$	2
4	$\mapsto$	1
5	$\mapsto$	9
6	$\mapsto$	10
7	$\mapsto$	4
8	$\mapsto$	6
9	$\mapsto$	12
10	$\mapsto$	11
11	$\mapsto$	5
12	$\mapsto$	8

Aufgabe 9.5

Die Anzahl der Eisläufer, die mit einer ungeraden Zahl von Eisläufern zusammenstoßen ist gerade.

Zunächst gehen wir davon aus, dass jeder Eisläufer gleichzeitig immer nur mit einem anderen Eisläufer zusammenstoßen kann, d.h. es gibt bei jedem Zusammenstoß immer genau zwei Beteiligte.
Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

- Es stoßen zwei Eisläufer zusammen die beide noch nicht zusammengestoßen sind, oder beide an einer geraden Anzahl von Zusammenstößen beteiligt waren:
  In diesem Fall bleibt die Anzahl der zusammengestoßenen Eisläufer mit ungerader Anzahl gerade, da zwei Eisläufer hinzukommen.

- Es stoßen zwei Eisläufer zusammen die beide an einer ungeraden Anzahl von Zusammenstößen beteiligt waren:
  In diesem Fall bleibt die Anzahl der zusammengestoßenen Eisläufer mit ungerader Anzahl gerade, da zwei Eisläufer mit ungerader Anzahl wegfallen.

- Es stoßen ein Eisläufer, der noch nicht an einem Zusammenstoß beteiligt war, oder ein Eisläufer der an einer geraden Anzahl an Zusammenstößen beteiligt war mit einem Eisläufer mit ungerader Zusammenstoßzahl zusammen:
  In diesem Fall verändert sich die Anzahl der zusammengestoßenen Eisläufer mit ungerader Anzahl nicht, da die Anzahl der Zusammenstöße des einen Eisläufer ungerade, die des anderen aber gerade wird.

Da die Anzahl der Eisläufer, die mit einer ungeraden Zahl von Eisläufern zusammengestoßen sind zu Beginn gerade ist (da für den ersten Zusammenstoß zwei Personen benötigt werden, die dann beide einen Zusammenstoß hatten (ungerade)) und sich wie in den drei möglichen Fällen gezeigt, nicht in eine ungerade ändern lässt, ist die obige Feststellung korrekt und eine ungerade Anzahl an Eisläufern mit ungeraden Zusammenstößen ist nicht möglich.