9. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 5. Juli 2004, 12^{23} Uhr
in den jeweils richtigen Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 9.1 (Endliche Körper). (6 Punkte)

Sei q eine Primpotenz. (Man darf auch getrost annehmen, q sei prim. Dadurch ändert sich eigentlich nichts.) Wir nehmen an, dass $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen ist. (Tatsächlich gibt es einen und bis auf Isomorphie auch nur einen.) In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass dann in $\mathbb{F}_q[x]$ die Gleichung

$$x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$$

gilt.

(i) Berechne die rechte Seite für $q = 3$ und $q = 5$.

(ii) Zeige, dass zwei Polynome f und g genau dann gleich sind, wenn $g \mid f$, $\deg f = \deg g$ und $\mathrm{lc}(f) = \mathrm{lc}(g)$ gilt.

(iii) Zeige, dass für $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ die Gleichung $a^{q-1} = 1$ gilt.

(iv) Zeige, dass für $a \in \mathbb{F}_q$ die Gleichung $a^q = a$ gilt.

(v) Schließe, dass für alle $a \in \mathbb{F}_q$ das Polynom $x - a$ das Polynom $x^q - x$ in $\mathbb{F}_q[x]$ teilt.

(vi) Folgere nun, dass $\prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$ das Polynom $x^q - x$ teilt und sogar gleich diesem ist.

Bemerkung: Diese Beobachtung ist die Grundlage für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit eines endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen, wenn nur q eine Primpotenz ist.

Aufgabe 9.2 (Graphen und Matrizen). (2 Punkte)

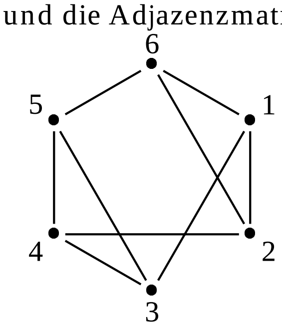
(i) Zeichne den Graphen mit der Inzidenzmatrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Zeichne den Graphen mit der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

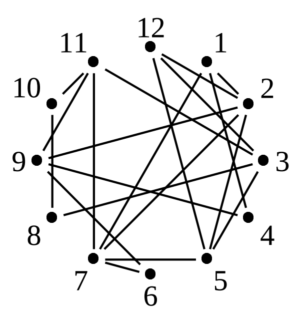
(iii) Bestimme die Inzidenz- und die Adjazenzmatrix für den Graphen



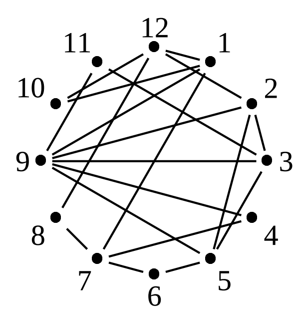
Aufgabe 9.3 (Kreise). (8 Punkte)

Prüfe bei den folgenden Graphen, jeweils ob sie einen Eulerkreis enthalten und ob sie einen Hamiltonkreis enthalten. (Begründung erforderlich!)

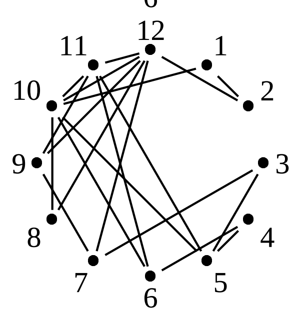
(i)



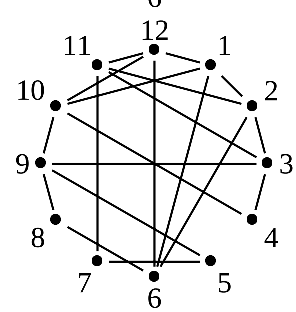
(iii)



(ii)



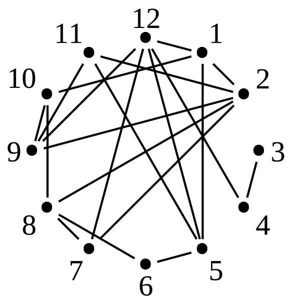
(iv)



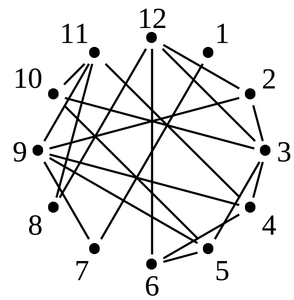
Aufgabe 9.4 (Isomorph oder nicht?). (6 Punkte)

Welche der folgenden Graphen sind isomorph und welche nicht?

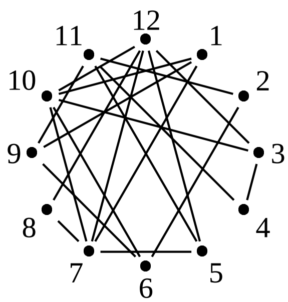
(i)



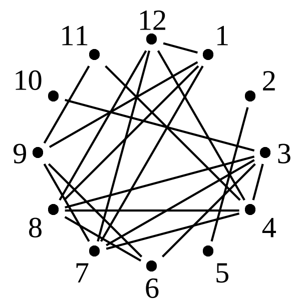
(iv)



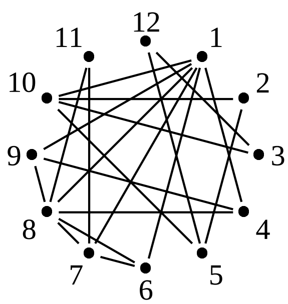
(ii)



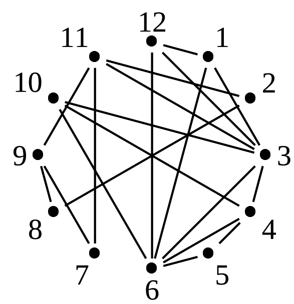
(v)



(iii)



(vi)



☺**Aufgabe 9.5** (Eiszeit). (0+2 Punkte)

Als es noch richtige Winter gab, war einmal der Möhnesee zugefroren. Eine Zeitung berichtete am Ende der Saison über ein erstaunliches Phänomen:

Außerirdische am Werk?

Seit der See zugefroren ist, hat es eine Menge Zusammenstöße zwischen Eisläufern gegeben. Beim Zählen der Zusammenstöße machte unser Korrespondent jedoch eine verblüffende Entdeckung: An jedem Tag war die Anzahl der Eisläufer, die mit einer ungeraden Zahl von Eisläufern zusammenstieß, gerade! Umfragen unter den Menschen auf dem Eis haben keinerlei Anhaltspunkte ergeben. Die Behörden schweigen sich aus. Trotz beharrlicher Nachfragen bei den örtlichen Ämtern weigerten diese sich standhaft Stellung zu dem Phänomen zu nehmen: Die Wasserpolizei dementierte jegliche Verdacht auf kriminelle Hintergründe. Die ansässigen Feuerwehren bestritten ihre Zuständigkeit. Lokale Politiker ließen sich verleugnen oder verwiesen auf Sonderkommissionen und strenge Geheimhaltungsvorschriften. Wissenschaftler der Universität Paderborn sind ratlos.

Ihr auch?

9. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 9.6 (Graphen und Matrizen).

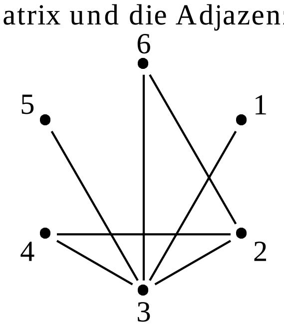
(i) Zeichne den Graphen mit der Inzidenzmatrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Zeichne den Graphen mit der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

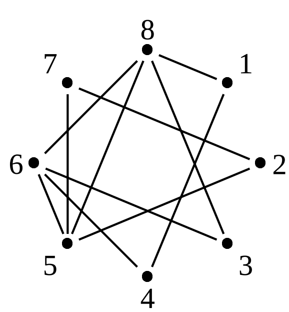
(iii) Bestimme die Inzidenzmatrix und die Adjazenzmatrix des Graphen



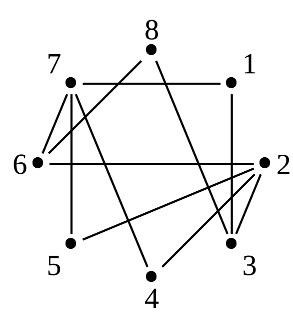
Mündliche Aufgabe 9.7 (Kreise).

Prüfe bei den folgenden Graphen, jeweils ob sie einen Eulerkreis enthalten und ob sie einen Hamiltonkreis enthalten. (Begründung erforderlich!)

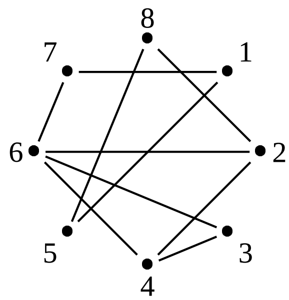
(i)



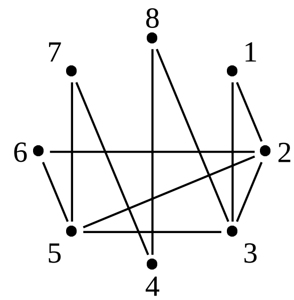
(ii)



(iii)



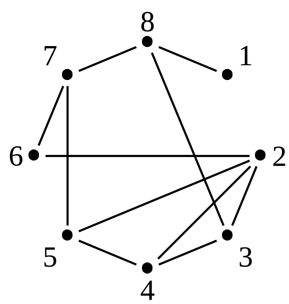
(iv)



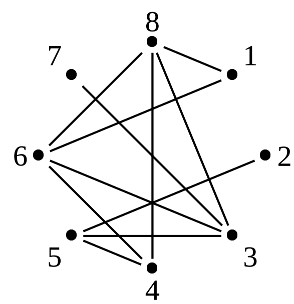
Mündliche Aufgabe 9.8 (Isomorph oder nicht?).

Welche der folgenden Graphen sind isomorph und welche nicht?

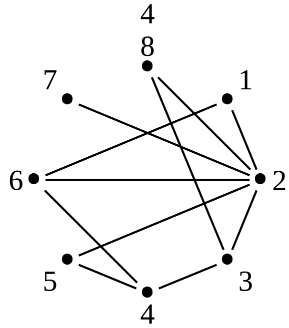
(i)



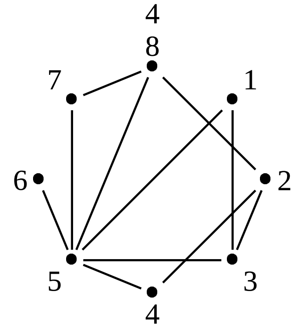
(iv)



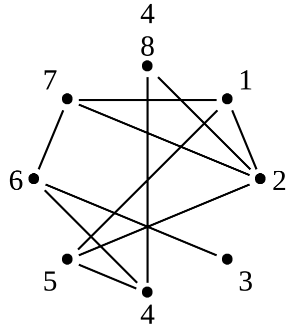
(ii)



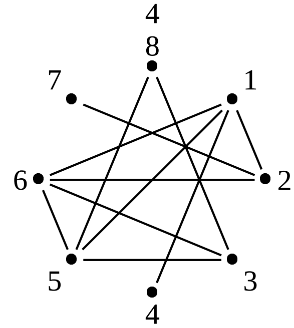
(v)



(iii)



(vi)



Mündliche Aufgabe 9.9 (Wege).

Ein ungerichteter Graph G ist durch seine Adjazenzmatrix A gegeben. Zeige: Der Eintrag (i, ℓ) der Matrix A^2 ist genau die Anzahl der Wege der Länge 2 von i nach ℓ.