[b|d] bernhard dietrich

Aufgabe 5.1

$$s(n) = \sum_{0\le k<n} \binom{7\ 062\ 004}{k} (-1)^k$$

$$= \sum_{0\le k<n} \left(\left(\binom{7\ 062\ 003}{k-1} + \binom{7\ 062\ 003}{k} \right) \cdot (-1)^k \right)$$

$$= \binom{7\ 062\ 003}{-1} + \binom{7\ 062\ 003}{0} - \binom{7\ 062\ 003}{0} - \binom{7\ 062\ 003}{1} \ldots$$

$$+ \binom{7\ 062\ 003}{n-1} \cdot (-1)^n + \binom{7\ 062\ 003}{n} \cdot (-1)^n$$

$$= \binom{7\ 062\ 003}{-1} + \binom{7\ 062\ 003}{n} \cdot (-1)^n$$

$$= \binom{7\ 062\ 003}{n} \cdot (-1)^n$$

Aufgabe 5.2

$(E^3 - E^2 + 2) f = h$, $f(0) = 0, f(1) = 0, f(2) = 0$, mit $h(n) = n^2$

(i) $f(n+3) - f(n+2) + 2f(n) = h$

(ii) $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0$

„Geraten“: $\lambda_1 = -1$

Also: $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$

$f_h(n) = a(-1)^n + b(1+i)^n + c(1-i)^n + d$

(iii)

$$a(n+3)^2 + b(n+3) + c - \left(a(n+2)^2 + b(n+2) + c\right) + 2\left(an^2 + bn + c\right) = n^2$$

$\Leftrightarrow 2an^2 + 2an + 5a + 2bn + b + 2c = n^2$

$\Leftrightarrow 2an^2 + n(2a + 2b) + 5a + b + 2c = n^2$

$\Rightarrow 2a = 1$

$(2a + 2b) = 0$

$5a + b + 2c = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{1}{2}$

$c = -1$

(iv) $f(n) = a(-1)^n + b(1+i)^n + c(1-i)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = a(-1)^0 + b(1+i)^0 + c(1-i)^0 + \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 - 1 = 0 \\ f(1) = a(-1)^1 + b(1+i)^1 + c(1-i)^1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 - 1 = 0 \\ f(2) = a(-1)^2 + b(1+i)^2 + c(1-i)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 - 1 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b + c - 1 = 0 \\ -a + b(1+i) + c(1-i) - 1 = 0 \\ a + b(1+i)^2 + c(1-i)^2 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

Also: $f(n) = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$

(v) Die komplexe Zahl
$z = a + ib$
lässt sich in Polarkoordinaten-Schreibweise auch schreiben als
$z = r(\cos t - i\sin t)$ schreiben.
Der Abstand zum Null-Punkt berechnet sich nach Pythagoras:
$(a+ib) = z = |z| \cdot e^{e\cdot\varphi} = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

Da $(1+i)^n$ gesucht ist, setzen wir $a = b = 1$ und exponieren mit n

Dabei gilt $|(1+i)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und, aufgrund der Darstellung in Bogenmaß $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Es folgt: $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot e^{i\frac{\pi}{4}n} = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)$

(vi) Da der Kosinus periodisch Verläuft, reicht es eine Periode zu betrachten:

n	$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$
-2	0
-1	≈ 0,71
0	1
1	≈ 0,71
2	0
3	≈ 0,71
4	-1
5	≈ 0,71
6	0

(vii) $$f(n)=\frac{1}{2}(1+i)^n+\frac{1}{2}(1-i)^n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)\right)+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$
$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$

Aufgabe 5.3

$\left(E-\frac{3}{n+1}I\right)f=h$, $f(0)=1$, mit $h(n)=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

Gemäß Vorlesung gilt:
$$f(n)=\frac{1}{g(n)}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(Eg\cdot b)(k)+g(0)f(0)\right)$$
Die Funktion $g(n)$ wurde gewählt als $g(n)=g(n+1)\cdot a(n)$.

Die Differenzengleichung lautet:
$$f(n+1)-\frac{3}{n+1}f(n)=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$
Also $a(n)=\frac{3}{n+1}$ und $b(n)=h(n)=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

Um die Differenzengleichung zu bestimmen ist nun die Funktion $g(n)$ erforderlich:
$$g(n+1)=\frac{g(n)}{a(n)}=\frac{g(n-1)}{a(n)a(n-1)}=\ldots=\frac{g(0)}{a(n)a(n-1)\cdot\ldots\cdot a(1)}$$
$$=\frac{g(0)}{\frac{3}{n+1}\cdot\frac{3}{(n-1)+1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{1+1}\cdot\frac{3}{0+1}}=\frac{g(0)}{\frac{3^n}{(n+1)!}}=g(0)\cdot\frac{(n+1)!}{3^n}$$
Mit $g(0)=1$ (gewählt) folgt: $g(n+1)=\frac{(n+1)!}{3^n}$ und daraus $g(n)=\frac{n!}{3^{n-1}}$.

$g(n)$ und b in obere Gleichung eingesetzt ergibt:
$$f(n)=\frac{3^{n-1}}{n!}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}\frac{(k+1)!}{3^k}\cdot\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}+1\cdot 1\right)$$
$$=\frac{3^{n-1}}{n!}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}3+1\right)$$
$$=\frac{3^{n-1}}{n!}\cdot(3n+1)$$
$$=3^n\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{3n!}\right)$$

Aufgabe 5.4

(i) $P(A \cap B) = 0$

(ii)
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) + 0 \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$
also wahre Aussage

(iii) Siehe ii

(iv) $P(A \mid B) = 0$ Beide Ereignisse können gemäß Aufgabenstellung nicht eintreten

(v) Nein, dann müsste gelten $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,42$

(vi) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$
Die Gegenwahrscheinlichkeit, für das bestehen von wenigstens einer Klausur beträgt dann: $1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,88$

(vii)
$$P_1(3 \text{ mal Eins}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$
$$P_2(2 \text{ mal Eins}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3! = \frac{5}{72}$$
$$P(\text{kein Gewinn}) = 1 - P(3 \text{ mal Eins}) - P(2 \text{ mal Eins}) = \frac{185}{216}$$
$$E(X) = (2€ - 66€) \cdot \frac{1}{216} + (2€ - 10€) \cdot \frac{5}{72} + 2€ \cdot \frac{185}{216} = \frac{31}{36} € \approx 0,86€$$

(viii)
$$100 \cdot E(X) = 100 \cdot \frac{31}{36} = \frac{775}{9} \approx 86,11€$$

Aufgabe 5.5

(i)
$$(0,2) \mapsto \frac{100}{400} \qquad (0,4) \mapsto \frac{80}{400} \qquad (0,6) \mapsto \frac{50}{400}$$
$$(1,2) \mapsto \frac{10}{400} \qquad (1,4) \mapsto \frac{40}{400} \qquad (1,6) \mapsto \frac{40}{400}$$
$$(2,2) \mapsto \frac{10}{400} \qquad (2,3) \mapsto \frac{30}{400} \qquad (2,6) \mapsto \frac{20}{400}$$
$$(3,2) \mapsto \frac{0}{400} \qquad (3,4) \mapsto \frac{10}{400} \qquad (3,6) \mapsto \frac{10}{400}$$

(ii)

X \ Y	2	4	6	$\sum$
0	$\frac{100}{400}$	$\frac{80}{400}$	$\frac{50}{400}$	$\frac{320}{400}$
1	$\frac{10}{400}$	$\frac{40}{400}$	$\frac{40}{400}$	$\frac{90}{400}$
2	$\frac{10}{400}$	$\frac{30}{400}$	$\frac{20}{400}$	$\frac{60}{400}$
3	$\frac{0}{400}$	$\frac{10}{400}$	$\frac{10}{400}$	$\frac{20}{400}$
$\sum$	$\frac{120}{400}$	$\frac{160}{400}$	$\frac{120}{400}$	$\frac{400}{400}$

(iii)

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot\left(\frac{100}{400}+\frac{80}{400}+\frac{50}{400}\right)+1\cdot\left(\frac{10}{400}+\frac{40}{400}+\frac{40}{400}\right)\\
&\quad +2\cdot\left(\frac{10}{400}+\frac{30}{400}+\frac{20}{400}\right)+3\cdot\left(\frac{0}{400}+\frac{10}{400}+\frac{10}{400}\right)\\
&= 0,625
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 2\cdot\left(\frac{10}{400}+\frac{10}{400}+\frac{10}{400}+\frac{0}{400}\right)+4\cdot\left(\frac{80}{400}+\frac{40}{400}+\frac{30}{400}+\frac{10}{400}\right)+6\cdot\left(\frac{50}{400}+\frac{40}{400}+\frac{20}{400}+\frac{10}{400}\right)\\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \left(X-E(X)\right)^2\\
&= (0-0,625)^2\cdot\frac{230}{400}+(1-0,625)^2\cdot\frac{90}{400}+(2-0,625)^2\cdot\frac{60}{400}+(3-0,625)^2\cdot\frac{20}{400}\\
&= 0,678125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(Y) &= \left(Y-E(Y)\right)^2\\
&= (2-4)^2\cdot\frac{120}{400}+(4-4)^2\cdot\frac{160}{400}+(6-4)^2\cdot\frac{120}{400}\\
&= (-2)^2\cdot\frac{120}{400}+2^2\cdot\frac{120}{400}\\
&= 2,4
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
0 &\mapsto \frac{80}{160}\\
1 &\mapsto \frac{40}{160}\\
2 &\mapsto \frac{30}{160}\\
3 &\mapsto \frac{10}{160}
\end{aligned}$$

(v) $$\mathrm{var}_{Y=4}(X) = (X - E(X))^2$$

$$= (0-0{,}8125)^2 \cdot \frac{80}{160} + (0{,}1875)^2 \cdot \frac{40}{160} + (1{,}1875)^2 \cdot \frac{30}{160} + (2{,}1875)^2 \cdot \frac{10}{160}$$

$$\approx 0{,}9023$$

Aufgabe 5.6

(i)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x^3	0	1	8	8	7	11	7	1	18	7	12	1	18	12	8	12	11	11	18

(ii) $$\#\sqrt[3]{0} = \#\{0\} = 1$$

$$\#\sqrt[3]{1} = \#\{1,7,11\} = 3$$

$$\#\sqrt[3]{7} = \#\{4,6,9\} = 3$$

$$\#\sqrt[3]{8} = \#\{2,3,14\} = 3$$

$$\#\sqrt[3]{11} = \#\{5,16,17\} = 3$$

$$\#\sqrt[3]{12} = \{10,12,15\} = 3$$

$$\#\sqrt[3]{18} = \#\{8,12,18\} = 3$$

(iii) $$P(x^3 = 0) = \frac{1}{19}$$

$$P(x^3 = c \mid c \in \{1,7,8,11,12,18\}) = \frac{3}{19}$$

$$P(x^3 = c \mid c \in \{2,3,4,5,6,9,10,13,14,15,16,17\}) = 0$$

(iv) $$E(x^3 = 0) = \frac{19}{1}$$

$$E(x^3 = c \mid c \in \{1,7,8,11,12,18\}) = \frac{19}{3}$$

$$E(x^3 = c \mid c \in \{2,3,4,5,6,9,10,13,14,15,16,17\}) = \infty$$

Aufgabe 5.7

(i) $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} pq^{n-1}(2^{n-1}+1)$$

(ii) $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(pq^{n-1} \cdot (2^{n-1}+1)\right) - q^m \cdot (2^m - 1)$$

Aufgabe 5.8

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}005 \cdot 0{,}999}$$

$$= \frac{22}{133}$$

Aufgabe 5.9

Ereignis A: Mindestens zwei von n Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.
Wahrscheinlichkeit P(A) = ?

Man löst diese Aufgabe mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses $\overline{A}$:
$\overline{A}$: Alle n Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag.

Berechnung von $P\left(\overline{A}\right)$:

Anzahl mögliche Fälle m (1 Jahr = 365 Tage): $m = 356^n$
Anzahl günstige Fälle g für $\overline{A}$: $g = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{g}{m}$$

Es gilt dann $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.