5. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 7. Juni 2004, 12^{23} Uhr
in den jeweils richtigen Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 5.1 (Summation). (4 Punkte)

Bestimme $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} \binom{7\,06\,20\,04}{k} (-1)^k$.

Aufgabe 5.2 (Differenzengleichung). (10 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$(*) \qquad (E^3 - E^2 + 2)f = h, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0,$$

wobei $h(n) = n^2$ ist.

(i) Formuliere die Gleichung auf Elementebene.

(ii) Finde alle Lösungen der homogenen Gleichung $(E^3 - E^2 + 2)f = 0$.

(iii) Finde eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(E^3 - E^2 + 2)f = h$ durch den Ansatz $f_0(n) = an^2 + bn + c$.

(iv) Löse $(*)$.

(v) Zeige $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos(n\frac{\pi}{4}) + i \sin(n\frac{\pi}{4})\right)$.

(vi) Erstelle eine Tabelle der Werte von $\cos(n\frac{\pi}{4})$ für soviele kleine Werte von $n \in \mathbb{Z}$, wie nötig sind, um „alles" darüber zu wissen. [Begründe, welche n nötig sind und welche nicht.]

(vii) Verwende die Darstellung aus (v), um die Lösung ohne imaginäre Größen darzustellen.

Aufgabe 5.3 (Differenzengleichung). (4 Punkte)

Löse die Differenzengleichung

$$(E - \frac{3}{n+1} I)f = h, \qquad f(0) = 1,$$

wobei $h(n) = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ ist.

Aufgabe 5.4 (Verschiedenes). (4 Punkte)

Die Ereignisse A und B seien unvereinbar. Welche Ausagen sind richtig, welche falsch? (Begründung angeben!)

(i) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(iii) $P(A \cup B) = 0$.

(iv) $P(A|B) = P(A)$.

Ein Student besteht die Klausur im Fach Statistik mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 und im Fach Mathematik mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7. Die Wahrscheinlichkeit beide Klausuren zu bestehen beträgt 0.5.

(v) Sind die Ereignisse eine Klausur zu bestehen voneinander unabhängig? (Begründung)

(vi) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Klausur zu bestehen?

Eine Spielbank bietet Ihnen folgendes Glücksspiel an: drei faire Würfel werden gleichzeitig geworfen; der Spieler erhält 66 € für drei Einsen, 10 € für zwei Einsen und 0 € sonst. Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 €.

(vii) Ist das Spiel für die Spielbank vorteilhaft?

(viii) Welchen Gewinn kann die Spielbank oder der Spieler bei einer Serie von 100 Spielen erwarten?

Aufgabe 5.5 (TÜV). (5 Punkte)

Der TÜV einer Kleinstadt überprüfte in einer Woche 400 PKW. Die Kontrolle ergab folgende zweidimensionale Häufigkeitsverteilung (vereinfachtes Modellbeispiel) der Zahl der Beanstandungen X und des Alter Y der PKW in Jahren:

Y / X	2	4	6	Summe
0	100	80	50	230
1	10	40	40	90
2	10	30	20	60
3	0	10	10	20
Summe	120	160	120	400

Berechne

(i) die gemeinsame Verteilung $(x, y) \mapsto P(X = x, Y = y)$.

(ii) die Verteilungen von X und Y.

(iii) $E(X)$ und $E(Y)$ sowie var(X) und var(Y).

(iv) die bedingte Verteilung $x \mapsto P_{Y=4}(X = x)$.

(v) Bestimme Erwartungswert und Varianz von X für 4 Jahre alte Fahrzeuge.

Aufgabe 5.6 (Erwartete Zeit). (4 Punkte)

Betrachte das folgende Programm:

Algorithmus. Kubikwurzel.
Eingabe: Werte $c \in \mathbb{F}_{19}$.
Ausgabe: Ein Wert $x \in \mathbb{F}_{19}$ mit $x^3 = c$.

1. Wiederhole
2. Wähle ein zufälliges Element $x \in \mathbb{F}_{19}$ gleichverteilt.
3. Bis $x^3 = c$.
4. Antworte x.

(i) Erstelle eine Tabelle mit sämtlichen dritten Potenzen in $\mathbb{F}_{19}$.

(ii) Welche Elemente haben Kubikwurzeln? Wieviele?

Unterscheide im Folgenden jeweils die drei Fälle, dass c keine, eine oder drei Kubikwurzeln hat.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewürfeltes Element $x \in \mathbb{F}_{19}$ eine Kubikwurzel von c ist?

(ii) Wie groß ist die erwartete Laufzeit des Algorithmus?

Aufgabe 5.7 (Multimilliardär Meier). (4 Punkte)

Wir nehmen einmal an, dass es in der Spielbank Bad Oeynhausen beim Roulette keinen Höchsteinsatz gibt. Multimilliardär Meier, der über beliebig viel Geld verfügt, spielt nach der folgenden Strategie: Er setzt immer auf die Kolonne $\{1, 2, \ldots, 12\}$, hat also pro Spiel eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{12}{38}$. Im Gewinnfalle wird der dreifache Einsatz ausbezahlt. Sein erster Einsatz beträgt 1 €. Im Falle eines Gewinns kassiert er den Reingewinn (also den Gewinn weniger den Einsatz), sonst verdoppelt er beim nächsten Spiel seinen Einsatz. Er spielt auf diese Weise so lange, bis er einmal gewinnt. Die Zufallsvariable X bezeichne den Reingewinn in € in einer solchen Serie.

(i) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (Es kann sein, dass $E(X)$ unerwartet hoch ausfällt.)

(ii) Berechne den Erwartungswert $E(X)$, falls er wegen eines Banklimits von 1 000 000 € nicht beliebig oft verdoppeln kann.

(iii*) Wie erklärst Du die Diskrepanz?

Aufgabe 5.8 (Alarmanlage). (2 Punkte)

In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch gibt sie Alarm mit der Wahrscheinlichkeit 0.99. Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie falschen Alarm mit der Wahrscheinlichkeit von 0.005. (Etwa weil eine Maus die Anlage berührt.) Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0.001. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch im Gange ist? (Die meisten Alarme, wie etwa Feueralarme, sind falsche Alarme.)

Aufgabe 5.9 (Geburtstag). (2 Punkte)

In einem Raum befinden sich n Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

5. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 5.10 (Summation).

Bestimme $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} \binom{2n}{k} (-1)^k$.

Mündliche Aufgabe 5.11 (Differenzengleichung).

Löse die Differenzengleichung

$$(**) \qquad (E^3 + 8)f = h, \qquad f(0) = 2, \quad f(1) = -4, \quad f(2) = 8,$$

wobei $h(n) = 81n(n-3)$ ist.

(i) Formuliere die Gleichung auf Elementebene.

(ii) Finde alle Lösungen der homogenen Gleichung $(E^3 + 8)f = 0$.

(iii) Finde eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(E^3 + 8)f = h$ durch den Ansatz $f_0(n) = an^2 + bn + c$.

(iv) Löse $(**)$.

(v) Zeige $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos(n\frac{\pi}{3}) + i \sin(n\frac{\pi}{3})\right)$.

(vi) Erstelle eine Tabelle der Werte von $\cos(n\frac{\pi}{3})$ für soviele kleine Werte von $n \in \mathbb{Z}$ wie nötig sind, um „alles“ darüber zu wissen. [Begründe, welche n nötig sind und welche nicht.]

(vii) Verwende die Darstellung aus (v), um die Lösung ohne imaginäre Größen darzustellen.

Mündliche Aufgabe 5.12 (Differenzengleichung).

Löse die Differenzengleichung

$$(E - \frac{2}{n+1} I)f = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Mündliche Aufgabe 5.13 (Würfel).

Ein Spiel bestehe aus dem Wurf zweier fairer Würfel. Ein Spieler bezahlt einem Veranstalter einen Spieleinsatz von 1 € pro Spiel. Fallen zwei Sechsen, erhält der Spieler 10 €. Fällt nur eine Sechs, erhält er 2 €; sonst nichts. Welchen Gewinn kann der Veranstalter pro Spiel erwarten?

☺**Mündliche Aufgabe 5.14** (Faule Eier).

Ein Student hat in seinem Kühlschrank acht Eier. Zwei Eier sind, ohne dass er es weiß, faul. Um sich Spiegeleier zu braten, entnimmt er zufällig drei Eier. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spiegeleier ungenießbar sind?

Mündliche Aufgabe 5.15 (Abhängig?).

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $(x, y) \mapsto P(X = x, Y = y)$ der beiden Zufallsvariablen X und Y ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

x \ y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(i) Finde ein passendes Universum U und erkläre die Zufallsvariablen X und Y geeignet.

(ii) Bestimme die beiden Verteilungen $x \mapsto P(X = x)$ und $y \mapsto P(Y = y)$.

(iii) Sind die beiden Zufallsvariablen voneinander unabhängig?

(iv) Berechne die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und Varianzen $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$.

(v*) Es gibt viele mögliche Wahlen für U. Begründe, dass die Ergebnisse von der Wahl des Universums unabhängig sind.

Mündliche Aufgabe 5.16 (Würfel).

Mit einem fairen Würfel wird so lange gewürfelt, bis jede der Werte $1, \ldots, 6$ mindestens einmal gefallen ist.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Wert erscheint, wenn zuvor bereits $i - 1$ verschiedene Werte gefallen sind?

(ii) Wie groß ist die erwartete Zeit für die (zusätzliche) Anzahl Würfe bis der i-te Wert erscheint, wenn zuvor bereits $i - 1$ verschiedene Werte gefallen sind?

(iii) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?

Mündliche Aufgabe 5.17 (Variationen).

Bearbeite einen der drei folgenden Aufgabenteile.

(i) 50% aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Jeder achte Amerikaner und jeder achtzigste Nichtamerikaner trinkt beim Frühstück einen Tomatensaft. Du beobachtest einen Teilnehmer, der zum Frühstück Tomatensaft trinkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Amerikaner ist?

(ii) Es sei bekannt, dass in 5% aller fahrenden Kraftfahrzeuge die Bremsen unzulänglich sind. Eine einfache Bremsprobe deckt tatsächlich vorhandene Unzulänglichkeiten mit 90% Wahrscheinlichkeit auf. In 2% der Fälle wird die Bremsanlage für unzulänglich gehalten, obwohl sie es in Wirklichkeit nicht ist.

   (a) Bei einem Fahrzeug wird die Bremsprobe gemacht, dass Bremssystem wird für gut befunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es tatsächlich gut?

   (b) Die Bremsprobe wird zweimal durchgeführt und geht beide Male gut aus. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Bremsanlage tatsächlich gut ist?

(iii) An einer bestimmten Krankheit erkranken 4% einer Bevölkerungsgruppe. Um ein rechtzeitiges Erkennen der Krankheit zu ermöglichen, wird ein Test entwickelt, mit dem man folgende Erfahrungen macht: Der Test zeigt einen positven Befund in 80% der Fälle, in denen die Person wirklich erkrankt ist. Er zeigt aber auch einen positiven Befund in 5% der Fälle, in denen die Person tatsächlich nicht erkrankt ist.

   (a) Es wird nun eine Person getestet, der Befund ist positiv. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person erkrankt?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank, obwohl der Befund negativ ist?