Aufgabe 4.1

(i)

$$\begin{aligned}
f(n) &= nH(n) \\
&= n\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} \\
\Delta f(n) &= (n+1)H(n+1) - nH(n) \\
&= (n+1)\sum_{1\le j\le n+1}\frac{1}{j} - n\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} \\
&= n\cdot\sum_{1\le j\le n+1}\frac{1}{j} + \sum_{1\le j\le n+1}\frac{1}{j} - n\cdot\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} \\
&= n\cdot\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} + \sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} - n\cdot\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1} + H(n)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{1\le k<n} H(k) \\
&= f(n) - f(1) \\
&= nH(n) - H(1) \\
&= n\sum_{1\le j\le n}\frac{1}{j} - 1 \\
&= nH(n) - 1 \\
&= f(n) - 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$\left(E^3 - 4E^2 - 4E + 16\right) f = 72$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$

Ansatz für $f(n) = \lambda^n$

Dann folgt: $E^3 f(n) = \lambda^{n+3} = \lambda^3(n)$

$$E^2 f(n) = \lambda^{n+2} = \lambda^2(n)$$

$$Ef(n) = \lambda^{n+1} = \lambda(n)$$

$\Rightarrow 72 = \left(E^3 - 4E^2 - 4E + 16\right) f = \left(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16\right) f$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$

Wir „raten“ $\lambda_1 = 2$, die restlichen Nullstellen ergeben sich dann mit Hilfe von Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\lambda^3 \quad -4\lambda^2 \quad -4\lambda \quad +16 \quad = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8) \\
\underline{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)} \\
\qquad -2\lambda^2 \quad -4\lambda \quad +16 \\
\qquad \underline{-(-2\lambda^2 + 4\lambda)} \\
\qquad\qquad -8\lambda + 16 \\
\qquad\qquad \underline{-(-8\lambda + 16)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$$

Daraus ergibt sich die homogene Funktion:

$$f_h(n) = a \cdot 2^n + b \cdot 4^n + c \cdot (-2)^n + d$$

Für ein konstantes d gilt dann: $(E^3 - 4E^2 - 4E + 16)d = 72$

$$\Rightarrow d - 4d - 4d + 16d = 72$$
$$\Leftrightarrow 9d = 72$$
$$\Leftrightarrow d = 8$$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f_h(n) + 8 \\
&= a \cdot 2^n + b \cdot 4^n + c \cdot (-2)^n + 8
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$ liefert

$$
\left|\begin{array}{r}
a \cdot 2^0 + b \cdot 4^0 + c \cdot (-2)^0 + 8 = 1 \\
a \cdot 2 + b \cdot 4 + c \cdot (-2) + 8 = 2 \\
a \cdot 2^2 + b \cdot 4^2 + c \cdot (-2)^2 + 8 = 4
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\
(-2\mathrm{I} + \mathrm{II}) \\
(-4\mathrm{I} + \mathrm{III})
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left|\begin{array}{r}
a + b + c = -7 \\
2 \cdot b - 4 \cdot c = 8 \\
12b = 24
\end{array}\right|
$$

$$
\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}
a = -8 \\
c = -1 \\
b = 2
\end{array}\right|
$$

Somit ergibt sich $f(n) = -8 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n - 1 \cdot (-2)^n + 8$

Aufgabe 4.3

$\left(E^3 - 4E^2 + 6E - 4\right) f = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$

Ansatz für $f(n) = \lambda^n$

Dann folgt: $E^3 f(n) = \lambda^{n+3} = \lambda^3(n)$

$$E^2 f(n) = \lambda^{n+2} = \lambda^2(n)$$

$$Ef(n) = \lambda^{n+1} = \lambda(n)$$

$$\Rightarrow 72 = \left(E^3 - 4E^2 + 6E - 4\right) f = \left(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4\right) f$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

Wir „raten“ $\lambda_1 = 2$, die restlichen Nullstellen ergeben sich dann mit Hilfe von Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\lambda^3 \quad -4\lambda^2 \quad +6\lambda \quad -4 \quad = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) \\
\underline{-\left(\lambda^3 - 2\lambda^2\right)} \\
\qquad -2\lambda^2 \quad +6\lambda \quad -4 \\
\qquad \underline{-\left(-2\lambda^2 + 4\lambda\right)} \\
\qquad\qquad -2\lambda - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2\lambda - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 + \sqrt{1-2} \vee \lambda = 1 - \sqrt{1-2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 + \sqrt{-1} \vee \lambda = 1 - \sqrt{-1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 + i \vee \lambda = 1 - i$$

Somit ergibt sich

$$f(n) = a \cdot 2^n + b \cdot (1+i)^n + c \cdot (1-i)^n$$

Einsetzen von $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2$ liefert:

$$\left|\begin{array}{r} a\cdot 2^0+b\cdot(1+i)^0+c\cdot(1-i)^0=0 \\ a\cdot 2^1+b\cdot(1+i)^1+c\cdot(1-i)^1=1 \\ a\cdot 2^2+b\cdot(1+i)^2+c\cdot(1-i)^2=2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ a\cdot 2+b\cdot(1+i)+c\cdot(1-i)=1 \\ a\cdot 4+b\cdot(2\cdot i)+c\cdot(-2\cdot i)=2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ (-2\mathrm{I}+\mathrm{II}) \\ (-4\mathrm{I}+\mathrm{III}) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ ((1+i)-2)\cdot b+((1-i)-2)\cdot c=1 \\ ((2\cdot i)-4)\cdot b+((-2\cdot i)-4)\cdot c=2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \\ (-((2\cdot i)-4)\cdot\mathrm{II}+((1+i)-2)\cdot\mathrm{III}) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ ((1+i)-2)\cdot b+((1-i)-2)\cdot c=1 \\ ((1+i)-2)((2\cdot i)-4)\cdot b-((1+i)-2)((2\cdot i)-4)\cdot b \\ +((1+i)-2)((-2\cdot i)-4)\cdot c-((1-i)-2)((2\cdot i)-4)\cdot c=-((2\cdot i)-4)+((1+i)-2)\cdot 2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ ((1+i)-2)\cdot b+((1-i)-2)\cdot c=1 \\ (-1+i)(-2\cdot i-4)\cdot c-(-1-i)(2\cdot i-4)\cdot c=2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ (-1+i)\cdot b+(-1-i)\cdot c=1 \\ (-2\cdot i+6)\cdot c-(2\cdot i+6)\cdot c=2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ (-1+i)\cdot b+(-1-i)\cdot c=1 \\ -4\cdot i\cdot c=2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ (-1+i)\cdot b+(-1-i)\cdot c=1 \\ c=-\dfrac{1}{2i} \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l} a=0 \\ b=-\dfrac{i}{2} \\ c=\dfrac{i}{2} \end{array}\right|$$

Es ergibt sich somit die Gleichung

$$f(n) = -\frac{i}{2}\cdot(1+i)^n + \frac{i}{2}\cdot(1-i)^n$$

Aufgabe 4.4

$$\left(E - \frac{n+1}{n+2}I\right)f = n^3,\ \ f(0) = 0$$

Gemäß Vorlesung gilt:

$$f(n) = \frac{1}{g(n)}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(Eg\cdot b)(k) + g(0)\,f(0)\right)$$

Die Funktion $g(n)$ wurde gewählt als $g(n) = g(n+1)\cdot a(n)$.

Die Differenzengleichung lautet:

$$\begin{aligned} f(n+1) - \frac{n+1}{n+2}f(n) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \\ &= \left(n^2-n\right)\cdot(n-2) \\ &= n^3 - 3n^2 + 2n \end{aligned}$$

Also $a(n) = \dfrac{n+1}{n+2}$ und $b(n) = n^3 = n^3 - 3n^2 + 2n$

Um die Differenzengleichung zu bestimmen ist nun die Funktion $g(n)$ erforderlich:

$$\begin{aligned} g(n+1) &= \frac{g(n)}{a(n)} = \frac{g(n-1)}{a(n)a(n-1)} = \ldots = \frac{g(0)}{a(n)a(n-1)\cdot\ldots\cdot a(1)} \\ &= \frac{g(0)}{\frac{\cancel{n+1}}{n+2}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{g(0)}{\frac{1}{n+2}} = g(0)\cdot\frac{n+2}{1} \end{aligned}$$

Mit $g(0) = 1$ (gewählt) folgt $g(n+1) = n+2$ und daraus $g(n) = n+1$

$g(n)$ und b in obere Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{g(n)}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(Eg\cdot b)(k) + g(0)\,f(0)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(Eg)(k)\cdot b(k) + g(0)\,f(0)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(k+2)\cdot\left(k^3-3k^2+2k\right) + g(0)\,f(0)\right) \end{aligned}$$

Da $g(0)=1$ und $f(0)=0$ bekannt sind, folgt

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}(k+2)\cdot\left(k^3-3k^2+2k\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}\left(k\left(k^3-3k^2+2k\right)+2\left(k^3-3k^2+2k\right)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}\left(k^4-3k^3+2k^2+2k^3-6k^2+4k\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}\left(k^4-k^3-4k^2+4k\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{0\le k<n}\left(k^2-k\right)\left(k^2-4\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot 0$$
$$=0$$

Die Lösung der Differenzengleichung $f(n)=0$.

Aufgabe 4.5

(i) An der ersten Stelle im Stapel können 32 verschiedene Karten liegen, an der zweiten noch 31, an der dritten noch 30, usw.
Also kann man ein Skatspiel mit 32 Karten auf $32! = 263\ 130\ 836\ 933\ 693\ 530\ 167\ 218\ 012\ 160\ 000\ 000 \approx 2{,}63\cdot 10^{35}$ verschiedene Arten Mischen.

(ii) Der erste Spieler kann alle Blätter bekommen, welche sich aus 32 Karten zusammenstellen lassen. Dabei werden zehn Karten „auf einen Griff“ gezogen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Also gilt:

$$\binom{32}{10}=64\ 512\ 240$$

Der zweite Spieler kann noch $\binom{22}{10}=646\ 646$ verschiedene Blätter und

der dritte Spieler noch $\binom{12}{10}=66$ verschiedene Blätter erhalten.

(iii)

(a) $\binom{32}{30}=496$

(b) $32^{30}=131\ 565\ 418\ 466\ 846\ 765\ 083\ 609\ 006\ 080\ 000\ 000$

(iv) Der erste Spieler kann eines der vier Asse erhalten und erhält aus den restlichen 28 Karten 9 weitere. Also ergibt sich:

für Spieler 1: $\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{9}=27\ 627\ 600$ Möglichkeiten, für Spieler 2: $\binom{3}{1}\cdot\binom{19}{9} = 277\,134$ Möglichkeiten und

für Spieler 3: $\binom{2}{1}\cdot\binom{10}{9} = 20$ Möglichkeiten.

Es bleiben ein As und eine andere Karte übrig.

Aufgabe 4.6

Für X :Wurf eines sechsseitigen, ungezinkten Würfels gilt, wie in der Vorlesung berechnet, $E(W) = 3{,}5$ (E :Erwartungswert für einen Wurf)

Für 4 Würfe gilt also $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 14$.

Die erwartete Augensumme für 4 Würfe ist also 14.

Aufgabe 4.7

Falschspieler verwenden einen Würfel W mit

$prob(W = 6) = \frac{64}{100}$,

$prob(W = k) = \frac{8}{100}$ für $k \in \{2,3,4,5\}$,

$prob(W = 1) = \frac{4}{100}$

(i) Die erwartete Augensumme von einem Wurf mit dem gezinkten Würfel ergibt sich durch $\sum_{u\in U} X(u)\cdot P(u)$ mit $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X(u) = u$ und

$$P(u) = \begin{cases} \frac{4}{100} & \text{für } u = 1 \\ \frac{8}{100} & \text{für } u \in \{2,3,4,5\} \\ \frac{64}{100} & \text{für } u = 6 \end{cases}.$$

Es folgt somit

$$E(X) = 1\cdot\frac{4}{100} + 2\cdot\frac{8}{100} + 3\cdot\frac{8}{100} + 4\cdot\frac{8}{100} + 5\cdot\frac{8}{100} + 6\cdot\frac{64}{100} = 5.$$

Da der Würfel nicht nur einmal sondern insgesamt viermal geworfen wird, gilt $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 20$.

Bei vier Würfen mit dem gezinkten Würfel ist also eine Augensumme von 20 zu erwarten.

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs fällt beträgt pro Wurf $\frac{64}{100}$,

die Gegenwahrscheinlichkeit also $1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Wurf die gewünschte Augenanzahl hat, beträgt $P(\text{n-ter Wurf eine 6}) = \left(\frac{36}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{64}{100}$.

Es folgt somit

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot P(\text{k-ter Wurf eine 6}) \\
&= \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot \left(\frac{36}{100}\right)^{k-1} \cdot \frac{64}{100} \\
&= \frac{64}{100} \cdot \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot \left(\frac{36}{100}\right)^{k-1} \\
&= \frac{64}{100} \cdot \frac{625}{256} \\
&= \frac{25}{16}
\end{aligned}
$$

Es ist also zu erwarten, dass alle 2 Würfe eine Sechs fällt.

(iii) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Eins fällt beträgt pro Wurf $\frac{4}{100}$,

die Gegenwahrscheinlichkeit also $1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Wurf die gewünschte Augenanzahl hat, beträgt $P(\text{n-ter Wurf eine 1}) = \left(\frac{96}{100}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{100}$.
Es folgt somit

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot P(\text{k-ter Wurf eine 1}) \\
&= \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{100} \\
&= \frac{44}{100} \cdot \sum_{\text{k=1}}^{\infty} k \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^{k-1} \\
&= \frac{64}{100} \cdot 625 \\
&= 400
\end{aligned}
$$

Es ist also zu erwarten, dass alle 400 Würfe eine Eins fällt.

Aufgabe 4.8
Durch probieren stellt man fest, dass die Anzahl der Möglichkeiten sich wie folgt berechnet:
$fibonacci(n+2)$ mit n :Anzahl der Stockwerke
Für das Empire State Building mit $n = 102$ Stockwerken ergibt sich dann:
$fibonacci(102+2) = 2\,427\,893\,228\,399\,975\,082\,453$