3. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 17. Mai 2004, 12^{23} Uhr
in den jeweils richtigen Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 3.1 (Differenzen). (4 Punkte)

Bestimme die Differenz Δf für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(n) = n(n-1)2^{n-2}$.

(ii) $f(n) = n^5 3^{n(n-1)}$.

(iii) $f(n) = \binom{n+1}{k+1}$ für eine feste Zahl $k \in \mathbb{N}$.

(iv) $f(n) = \frac{n^4}{n^{\underline{4}}}$.

Aufgabe 3.2 (Summation). (8 Punkte)

Bestimme die diskrete Stammfunktion s zu k^3, also $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} k^3$, in folgenden Schritten:

(i) Stelle die zugehörige Differenzengleichung auf.

(ii) Verwende den Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ zur Lösung der Differenzengleichung mit Unbekannten a, b, c, d, e und bestimme damit die Summe.

[Vorüberlegungen zeigen, daß, wenn die Lösung ein Polynom ist, dann höchstens ein solches, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 \leq s(n) \leq n^4$ gilt.]

Und jetzt noch einmal von vorn mit einem anderen Verfahren: Wir wollen dazu $k^3 = fk^{\underline{3}} + gk^{\underline{2}} + hk^{\underline{1}} + j$ mit geeigneten f, g, h, j schreiben.

(iii) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ durch Einsetzen geeigneter Werte für k. [Zum Beispiel $k = 0$ liefert die Gleichung $0 = f \cdot 0 + g \cdot 0 + h \cdot 0 + j, \ldots$]

(iv) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ durch Koeffizientenvergleich.

(v) Bestimme $f, g, h, j \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Stirlingzahlen.

(vi) Verwende dies, um s zu bestimmen.

Bleibt eine kleine Kuriosität:

(vii) Vergleiche Dein Ergebnis mit $\left(\sum_{0 \leq k < n} k\right)^2$.

Aufgabe 3.3 (Summation). (4 Punkte)

Sei $f(n) = \frac{n\left(11n^2+48n+49\right)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(i) Zeige $\Delta f(n) = \frac{3}{n^2+5n+4}$.

(ii) Berechne

$$\sum_{0\leq k<n} \frac{3}{k^2+5k+4}.$$

(iii) Zeige $\frac{3}{k^2+5k+4} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}$ und bestimme mit dieser Information nochmal

$$\sum_{0\leq k<n} \frac{3}{k^2+5k+4}.$$

Aufgabe 3.4 (Differenzengleichung). (4 Punkte)

Löse die Differenzengleichungen

$$(E^2 - E - I)f = 0, \qquad f(0) = 1, \quad f(1) = 1.$$

Aufgabe 3.5 (Operatoren). (4 Punkte)

Der Multiplikationsoperator M multipliziert zwei Funktionen punktweise, also $M(f,g) = f \cdot g$ mit $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$.

(i) Formuliere die zweite Aussage von Satz 6.14 ($\Delta(f \cdot g)(n) = (\Delta f)(n)g(n+1) + f(n)(\Delta g)(n)$) auf Operatorenebene (mit $M, \ldots$).

(ii) Zeige $\Delta \circ M = M(I,\Delta) + M(\Delta, I) + M(\Delta,\Delta)$. Argumentiere sorgfältig auf den drei Ebenen (Elemente, Funktionen von Elementen, Operatoren auf Funktionen).

***Aufgabe 3.6** (Quizfrage). (0+2 Punkte)

Bestimme $Q_{1\,000\,000}$, wobei für $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n = \sum_{0\leq k\leq 2^n} \binom{2^n - k}{k} (-1)^k$$

ist.

Literatur

R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH & O. PATASHNIK (1994). *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, Reading MA, 2nd edition. First edition 1989.

3. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 3.7 (Differenzen).

Bestimme die Differenz Δf für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(n) = n2^{n-1}$.

(ii) $f(n) = n^2 5^{n(n-1)}$.

(iii) $f(n) = n^{\underline{3}}/n^3$. (Für $n = 0$ macht das keinen Sinn, aber…)

(iv) $f(n) = \frac{3n}{n+1}$.

Mündliche Aufgabe 3.8 (Summation).

Bestimme die diskrete Stammfunktion s zu k^2, also $s(n) = \sum_{0 \leq k < n} k^2$, in folgenden Schritten:

(i) Stelle die zugehörige Differenzengleichung auf.

(ii) Verwende den Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ zur Lösung der Differenzengleichung mit Unbekannten a, b, c, d und bestimme damit die Summe.

[Vorüberlegungen zeigen, daß, wenn die Lösung ein Polynom ist, dann höchstens ein solches, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 \leq s(n) \leq n^3$ gilt.]

Und jetzt noch einmal von vorn mit einem anderen Verfahren:

(iii) Schreibe $k^2 = fk^{\underline{2}} + gk^{\underline{1}} + h$ mit geeigneten f, g, h.

(iv) Verwende dies, um s zu bestimmen.

Mündliche Aufgabe 3.9 (Summation).

Sei $f(n) = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$.

(i) Zeige $\Delta f(n) = \frac{2}{n^2+4n+3}$.

(ii) Berechne

$$\sum_{0\le k<n} \frac{2}{k^2+4k+3}.$$

(iii) Zeige $\frac{2}{k^2+4k+3} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}$ und bestimme mit dieser Information nochmal

$$\sum_{0\le k<n} \frac{2}{k^2+4k+3}.$$

Mündliche Aufgabe 3.10 (Differenzengleichung).

Löse die Differenzengleichungen

$$(E^2 - 3E + 2I)f = 0, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

***Mündliche Aufgabe 3.11** (Kombinationen).

Auf wieviele Arten kann man € 1,99 bezahlen? [Mit anderen Worten: wieviele Kombinationen von 1-Cent-, 2-Cent-, 5-Cent-, 10-Cent-, 20-Cent-, 50-Cent- und 1 Euromünzen ergeben die gefrage Summe?]

Tip: Verwende die geometrische Reihe.