Aufgabe 2.1

Für jede Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_{<n} = \{0,...,n-1\}$ gibt es genau eine Zahl $0 \le i \le n$ mit $\# J = i$. Für jede Zahl $0 \le i \le n$ gibt es $i \cdot \binom{n}{i}$ Teilmengen.

Es folgt:

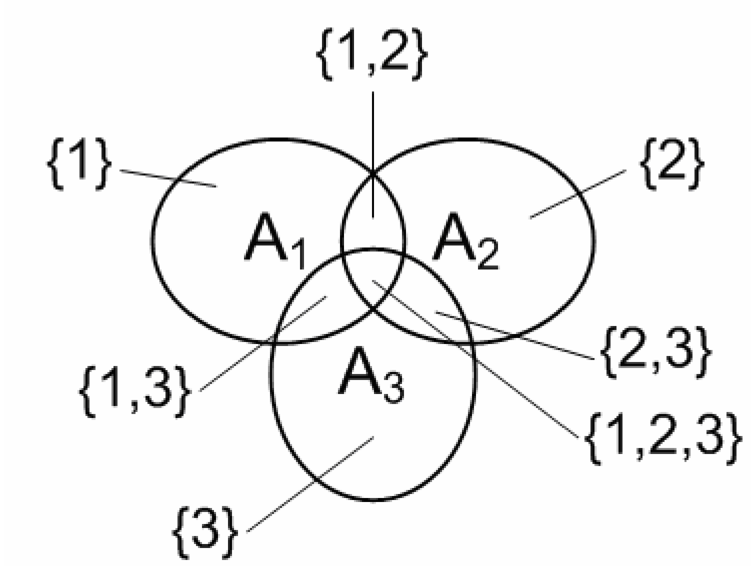
$$\begin{aligned}
\sum_{0\le i\le n} i \cdot \binom{n}{i} &= \sum_{0\le i\le n} i \cdot \#\{J \subset \mathbb{N}_{<n} \mid \# J = i\} \\
&= \#\{(i,(j,J)) \mid 0 \le i \le n, J \subset N_{<n}, \# J = i, j \in J\} \\
&= \sum_{\substack{J\subset\mathbb{N}_{<n} \\ j\in J}} \#\{i \mid i = \# J\} \\
&= \sum_{\substack{J\subset\mathbb{N}_{n} \\ j\notin J}} 1 \\
&= n \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

i) Die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 0 und $2^n - 1$ beträgt 2^n ($n \in \mathbb{N}$) und wird der Anzahl der benötigten Einsen ($e \in \mathbb{N}$) zugeordnet.
Somit ergibt sich die bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

ii) Zwischen der Zahl 0 und der Zahl $2^n - 1$ liegen 2^n Zahlen. Eine Zahl ist jeweils n Ziffern lang (führende Nullen zugelassen), da die Zahl $2^n - 1$ aus n Einsen besteht und die Zahl 2^n aus $n+1$ Ziffern besteht, wobei die erste Ziffer eine Eins ist und die folgenden Ziffern Nullen sind.
Es gibt somit insgesamt $n \cdot 2^n$ Ziffern. Da an jeder Position entweder eine 0 oder eine 1 stehen muss, gibt es zwei Möglichkeiten, jede Position zu besetzen, so dass von jeder Ziffer in einer Folge von 0 bis $2^n - 1$ genau $\frac{n \cdot 2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$ mal vorkommt.

Aufgabe 2.3



Aufgabe 2.4

i) Nach Definition enthält die Menge $M_p^{(N)}$ nur Zahlen, für die gilt $p^2 \mid n$ mit $n \in \mathbb{N}_{<N}$. Also gibt es eine Zahl p, deren Quadrat n teilt.

- Wenn p prim ist, bedeutet dies, dass p zwei Mal in der Primfaktorzerlegung vorhanden ist, womit die Bedingung für die quadratfreien Zahlen nicht mehr gegeben ist, also n nicht zur Menge der quadratfreien Zahlen gehört.
- Wenn p nicht prim ist, bedeutet dies, dass es eine Zerlegung $p = a \cdot q$ ($a, q \in \mathbb{N} \mid q$ prim) gibt. Quadriert man diese Zerlegung, ergibt sich $(a \cdot q)^2 = a \cdot a \cdot q \cdot q$. Da die Primzahl q somit in dieser Zerlegung zwei Mal und daher auch in der Primfaktorzerlegung mindestens zwei Mal vorkommt, gehört die Zahl n, welche sich durch $(a \cdot q)^2$ teilen lässt, nicht zur Menge der quadratfreien Zahlen.

ii) Da jede nicht-quadratfreie Zahl durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist (Vereinigung der Mengen $M_p^{(N)}$ über den Primzahlen), sind die Mengen gleich.

iii) **Hinweis:** Die folgende Tabelle gibt die Werte für $\mathbb{N} \backslash 0$ an. Für $\mathbb{N}$ einschließlich 0 sind alle Werte um 1 höher, da $\forall p \in \mathbb{N}_{>1} : p^2 \mid 0$.

N	30	80	200	900	10 000
$\#M_2^{(N)}$	7	19	49	224	2 499
$\#M_3^{(N)}$	3	8	22	99	1 111
$\#M_5^{(N)}$	1	3	7	35	399
$\#M_{2\cdot 3}^{(N)}$	0	2	5	24	277
$\#M_{2\cdot 5}^{(N)}$	0	0	1	8	99
$\#M_{3\cdot 5}^{(N)}$	0	0	0	3	44
$\#M_{2\cdot 3\cdot 5}^{(N)}$	0	0	0	0	11

iv)
$$QF^{(30)} = 18$$
$$QF^{(80)} = 50$$
$$QF^{(200)} = 122$$
$$QF^{(900)} = 547$$
$$QF^{(10\ 000)} = 6\ 083$$
$$QF^{(1\ 000\ 000)} = 607\ 926$$

v) Beweis: Induktion über $\# I$

$\# I = 1:\ I = \{p\}$ und somit $1 - \frac{1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p^2}$ (wahre Aussage)

$\# I = n:\ I = \{p_1, ..., p_n\}$ und somit

$$1 - \sum_{p_1 \in I} \frac{1}{p_1^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} - ...(-1)^n \sum_{\{p_1, ..., p_n\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^2 \cdot ... \cdot p_n^2} = \prod_{p \in I} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Aus $\# I = n+1$ folgt $I = \{p_1, ..., p_n, p_{n+1}\}$

$$\prod_{p \in I} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p \in I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}^2}\right)$$

$$\overset{\text{1.Vor.}}{=} \left(1 - \sum_{p_1 \in I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \mp ...\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{p_{n+1}^2} - \sum_{p_1 \in I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p_{n+1}^2} \cdot \sum_{p_1 \in I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} - \frac{1}{p_{n+1}^2}$$

$$\cdot \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \mp ...(-1)^{n+1} \frac{1}{p_{n+1}^2} \cdot \sum_{\{p_1, ..., p_n\} \subseteq I \setminus \{\mathrm{p_{n+1}}\}} \frac{1}{p_1^2 \cdot ... \cdot p_n^2}$$

$$= 1 - \sum_{p_1 \in I} \frac{1}{p^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \mp ...(-1)^{n+1} \sum_{\{p_1, ..., p_n, \mathrm{p_{n+1}}\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^2 \cdot ... \cdot p_n^2 \cdot p_{n+1}^2}$$

■

vi) Aus ii wird ersichtlich, dass $QF^{(N)} = \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{QV} \left(\mathrm{QV} \subseteq \mathbb{N}_{<N}\right)$ gilt. Es ist somit

$$\# QF^{(N)} = N - \# QV$$

$$= N - \# \bigcup_{\substack{p \text{ prim} \\ p < \sqrt{N}}} \mathrm{M_p^{(N)}}$$

$$= ...$$

$$= N \cdot \left(1 - \sum_{p_1 \in I} \frac{1}{p_1^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \in I} \frac{1}{p_1^2 \cdot p_2^2} - ...\right)$$

$$\overset{\text{nach v)}}{=} N \cdot \prod_{p_1 \in I} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Durch die Bemerkung ist bekannt, dass $\lim\limits_{k \to \infty} \prod\limits_{\substack{p \text{ prim} \\ p < k}} \left(1\text{-}\frac{1}{\mathrm{p}^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934...$

Der Grenzwert für das Inverse ist somit $\left(\lim\limits_{k \to \infty} \prod\limits_{\substack{p \text{ prim} \\ p < k}} \left(1\text{-}\frac{1}{\mathrm{p}^2}\right)^{-1}\right)^{-1} \approx 0{,}60792...$, so dass für

große N folgt: $N \prod\limits_{p_1 \in I} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \approx N \cdot 0{,}60792...$

Aufgabe 2.5

i) Die erzeugende Funktion für dieses Problem ist

$$f(x) = \left(x^2 + x^3\right) \cdot \left(x + x^2\right) \cdot \left(x^0 + x^1\right) \cdot \left(x^5 + x^6 + x^8\right) \cdot x^1$$
$$= x^{15} + 3x^{14} + 4x^{13} + 5x^{12} + 6x^{11} + 4x^{10} + x^9$$

Es gibt also 5 verschiedene Möglichkeiten für Kaufzusammenstellungen mit 12 Teilen, die den von Michael vorgegebenen Parametern entsprechen.

ii) Es gibt insgesamt $1+3+4+5+6+4+1=24$ verschiedene Möglichkeiten anhand Michaels Vorgaben einzukaufen.
Die Wahrscheinlichkeit für genau 12 Teile liegt bei

$$\frac{\text{mögliche Auswahl von 12 Käufen}}{\text{insgesamt mögliche Auswahl}} = \frac{5}{24} = 0{,}208\overline{3} \approx 20{,}8\%$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei etwa 20,8%.