2. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN, MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 10. Mai 2004, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 2.1 (Zweifach Abzählen). (4 Punkte)

Zeige

$$\sum_{0 \le i \le n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

durch zweifaches Abzählen von Paaren $(i,(j,J))$, wobei $0 \le i \le n$ und $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, $j \in J$ sowie $i = \#J$ gilt.

Aufgabe 2.2 (Einsen und Nullen). (4 Punkte)

Wie viele Einsen braucht man für eine Liste der Binärdarstellungen aller natürlichen Zahlen kleiner als 2^n? Beweise dies

(i) mit Hilfe einer Bijektion. (Nullen?)

(ii) mit Hilfe der Regel vom zweifachen Abzählen.

Aufgabe 2.3 (Inklusion / Exklusion). (2 Punkte)

Zeichne ein Venn-Diagramm für die In-/Exklusion mit drei Mengen A_1, A_2, A_3. Markiere darin jeden der sieben Bereiche mit der zugehörigen Indexmenge $K \subseteq \{1,2,3\}$, $K \neq \emptyset$.

Aufgabe 2.4 (Quadraftfreie Zahlen zählen). (10 Punkte)

Wir wollen zählen, wie viele natürliche Zahlen kleiner N quadratfrei sind. Eine Zahl n ist *quadratfrei*, wenn keine Primzahl sie zweimal teilt, oder, mit anderen Worten, wenn in der Primfaktorzerlegung keine Primzahl doppelt auftritt. Also ist 6 quadratfrei, aber 12 nicht.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathrm{QF}^{(N)} &:= \{n \in \mathbb{N}_{<N} \mid n \text{ quadratfrei}\}, \\ M_p^{(N)} &:= \{n \in \mathbb{N}_{<N} \mid p^2 \mid n\} \end{aligned}$$

für $p > 1$.

(i) Zeige: Die Zahlen in $M_p^{(N)}$ sind nicht quadratfrei. (Also $M_p^{(N)} \subseteq \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{QF}^{(N)}$.)

(ii) Zeige: Die Menge $\mathrm{QV} = \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{QF}^{(N)}$ der nicht quadratfreien Zahlen kleiner N ist gerade die Vereinigung der Mengen $M_p^{(N)}$ über die Primzahlen p kleiner $\sqrt{N}$.

(iii) Bestimme die Anzahlen von $M_2^{(N)}$, $M_3^{(N)}$, $M_5^{(N)}$ sowie $M_{2\cdot 3}^{(N)}$, $M_{2\cdot 5}^{(N)}$, $M_{3\cdot 5}^{(N)}$ und $M_{2\cdot 3\cdot 5}^{(N)}$ für $N = 30, 80, 200, 900, 10\,000$.

(iv) Bestimme die Anzahl von $\mathrm{QF}^{(N)}$ für $N = 30, 80, 200, 900, 10\,000, 1\,000\,000$.

(v) Zeige

$$1 - \sum_{p_1 \in I} \frac{1}{p_1^2} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \mp \cdots = \prod_{p \in I} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

für die Menge I der Primzahlen kleiner als $\sqrt{N}$. Die linke Seite kann formal geschrieben werden als

$$\sum_{0 \le k \le \# I} \sum_{K \in \binom{I}{k}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^2},$$

wobei $\binom{I}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von I bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert des Produktes ist wohl bekannt, für das Inverse gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{\substack{p \text{ prim}, \\ p < k}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \zeta(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934\ldots$$

(vi) Nähere die Anzahl von $M_p^{(N)}$ durch $\frac{N}{p^2}$ an und finde einen Näherungsausdruck für die Anzahl von $\mathrm{QF}^{(N)}$.

Aufgabe 2.5 (Erzeugende Funktionen). (2 Punkte)

Michael kleidet sich neu ein. Er möchte zwei bis drei Hosen, ein oder zwei Jacken, vielleicht einen Pulli, fünf, sechs oder acht T-Shirts und einen Mantel haben. Am Abend stellt er fest, dass er genau 12 Teile gekauft hat.

(i) Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

(ii) Wieviele Möglichkeiten gab es insgesamt und was ist also die Wahrscheinlichkeit für genau 12 Teile?

2. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN, MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 2.6 (Zweifach Abzählen).

Zeige

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)2^{n-2}$$

durch zweifaches Abzählen von Paaren $(i, (j_1, j_2, J))$, wobei $0 \leq i \leq n$ und $J \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$ sowie $i = \#J$ gilt.

Mündliche Aufgabe 2.7 (Ziffern).

Wie viele Einsen braucht man, um alle n-stelligen Dezimalzahlen aufzuschreiben? Beweise dies

(i) mit Hilfe mehrerer Bijektionen. (Nullen? Zweien? ...)

(ii) mit Hilfe der Regel vom zweifachen Abzählen.

Mündliche Aufgabe 2.8 (Binomialkoeffizienten).

Zeige

$$\sum_{k \leq i \leq n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

durch Zählen von geeigneten Paaren. [Induktion ist hier nicht erlaubt.]

Mündliche Aufgabe 2.9 (Kubikfreie Zahlen zählen).

Wir wollen zählen, wieviele natürliche Zahlen kleiner N kubikfrei sind. Eine Zahl n ist *kubikfrei*, wenn keine Primzahl sie dreimal teilt, oder, mit anderen Worten, wenn in der Primfaktorzerlegung keine Primzahl dreifach auftritt.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathrm{CF}^{(N)} &:= \{n \in \mathbb{N}_{<N} \,|\, n \text{ kubikfrei}\}, \\ M_p^{(N)} &:= \{n \in \mathbb{N}_{<N} \,|\, p^3 \mid n\} \end{aligned}$$

für $p > 1$.

(i) Zeige: Die Zahlen in $M_p^{(N)}$ sind nicht kubikfrei. (Also $M_p^{(N)} \subseteq \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{CF}^{(N)}$.)

(ii) Zeige: Die Menge $\mathrm{CV} = \mathbb{N}_{<N} \setminus \mathrm{CF}^{(N)}$ der nicht kubikfreien Zahlen kleiner N ist gerade die Vereinigung der Mengen $M_p^{(N)}$ über die Primzahlen p kleiner $\sqrt[3]{N}$.

(iii) Bestimme die Anzahlen von $M_2^{(N)}$, $M_3^{(N)}$, $M_5^{(N)}$ sowie $M_{2\cdot 3}^{(N)}$, $M_{2\cdot 5}^{(N)}$, $M_{3\cdot 5}^{(N)}$ und $M_{2\cdot 3\cdot 5}^{(N)}$ für $N = 30, 250, 10\,000, 30\,000$.

(iv) Bestimme die Anzahl von $\mathrm{CF}^{(N)}$ für $N = 30, 250, 10\,000, 30\,000$.

(v) Zeige

$$1 - \sum_{p_1 \in I} \frac{1}{p_1^3} + \sum_{\{p_1, p_2\} \subseteq I} \frac{1}{p_1^3 p_2^3} \mp \cdots = \prod_{p \in I} \left(1 - \frac{1}{p^3}\right),$$

für die Menge I der Primzahlen kleiner $\sqrt[3]{N}$. Die linke Seite kann formal geschrieben werden als

$$\sum_{0 \leq k \leq \# I} \sum_{K \in \binom{I}{k}} (-1)^k \prod_{p \in K} \frac{1}{p^3},$$

wobei $\binom{I}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von I bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert des Produktes ist wohlbekannt, für das Inverse gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{\substack{p \text{ prim}, \\ p < k}} \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)^{-1} = \zeta(3) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{n^3} \approx 1.2020569\ldots$$

(vi) Nähere die Anzahl von $M_p^{(N)}$ durch $\frac{N}{p^3}$ an und finde einen Ausdruck für die Anzahl von $\mathrm{CF}^{(N)}$.

Mündliche Aufgabe 2.10 (Erzeugende Funktionen).

Beim Münzwurf können die Ergebnisse 0 (Wappen) und 1 (Zahl) auftreten. Die zugehörige erzeugende Funktion ist $1 + x$.

(i) Bestimme die erzeugende Funktion zum Wurf von acht unabhängigen Münzen.

(ii) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, k mal Zahl zu werfen, für $0 \leq k \leq 8$.

(iii) Veranschauliche das Ergebnis durch ein Schaubild.