Klausurvorbereitung zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Keine Abgabe — freiwillige Bearbeitung.

Die Klausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II, SS 2004 findet am **16. August 2004** von **09^{00}-11^{00}** in **der Sporthalle und ggf. dem Audimax** statt.

Hinweise zur Klausur: Kontrollieren Sie die Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte Aufgabe 1 bis Aufgabe NN enthalten. Tragen Sie Name und Matrikelnummer **auf jedem Blatt** ein. Lösungswege und Lösungen sind in die Klausurvorlage (eventuell auf die Rückseiten) einzutragen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung. **Die Klammerung der Klausur nicht lösen!**

Nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!

Die Klausur ist eigenständig zu bearbeiten. Als Hilfmittel sind erlaubt: Schreibutensilien, ein Taschenrechner (nichtprogrammierbar, ohne Division mit Rest, ohne Lineare-Algebra-Software) und ein von eigener Hand mit Notizen beidseitig beschriebenes DIN A4-Blatt. Alle anderen Hilfsmittel, auch eigenes Papier, sind verboten!

Täuschungsversuche können — auch wenn sie erst nachträglich erkannt werden — zum Nichtbestehen dieser Klausur führen.

Bitte beachten: Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen der Wiederholung des in der Vorlesung behandelten Stoffes. Aus Art und Auswahl der Aufgaben kann in keiner Weise auf die Aufgaben der Klausur geschlossen werden. Die Klausur wird kürzer sein.

Zur Klausur sind ausserdem der Studierendenausweis, ein Lichtbildausweis und gegebenenfalls der Laufzettel **mitzubringen**.

Aufgabe 1 (Paderborner Allerlei).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen **Minuspunkt**. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Eine Teilmenge H einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn für alle $a \in G$ und $b \in H$ auch $ab \in H$ und $b^{-1} \in H$ gilt.
☐ Richtig ☐ Falsch

(ii) Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ist zyklisch. ☐ Richtig ☐ Falsch

(iii) Die Gruppe aller invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_3$ ist nicht kommutativ. ☐ Richtig ☐ Falsch

(iv) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\operatorname{prob}(A \,|\, B)$ ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung der Ereignisse A und B dividiert durch die Wahrscheinlichkeit von B. ☐ Richtig ☐ Falsch

(v) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Dann ist f eine diskrete Stammfunktion von Δf.
☐ Richtig ☐ Falsch

(vi) Seien a und b Polynome über $\mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dann gibt es Polynome q und r mit $a = qb - r$ und $\deg r < \deg b$. ☐ Richtig ☐ Falsch

(vii) Eine monotone, beschränkte Folge konvergiert. ☐ Richtig ☐ Falsch

(viii) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, deren Glieder a_n alle positiv sind und eine Nullfolge bilden, konvergiert. ☐ Richtig ☐ Falsch

(ix) Sei $\sqrt[n]{|a_n|}$ eine beschränkte, konvergente Folge, die nicht gegen Null konvergiert. Die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert, ist
☐ ein Quadrat ☐ eine endliche Kreisscheibe möglicherweise mit Lücken im Kreisrand ☐ eine Halbebene ☐ ganz $\mathbb{C}$ ☐ nichts davon

(x) $n^3 + 4n - 17 + (-1)^n \in$
☐ $\mathcal{O}(n^3)$ ☐ $\mathcal{O}(n^2)$ ☐ $\mathcal{O}(2^{n \log n})$ ☐ nichts davon

Aufgabe 2 (Zweifach Abzählen).

Zeige für $0 < k \leq n$
$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i} = \binom{n}{j}\binom{j}{i}$$
durch zweifaches Abzählen von Paaren (I, J), wobei $I \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{i}$ und $J \in \binom{\mathbb{N}_{<n}}{j}$ sowie $I \subseteq J$ gilt.

Aufgabe 3 (In-/Exklusion).

Für eine Statistik wurde eine Anzahl Personen befragt. 33 gaben an ein eigenes Auto zu fahren, 29 besitzen einen Computer und 12 haben ein Handy. 20 der Autofahrer haben einen Computer und 10 haben ein Handy. 11 der Computerbesitzer haben auch ein Handy und 9 von diesen fahren ein eigenes Auto. Wieviele Personen haben wenigstens einen der drei Punkte angegeben?

Aufgabe 4 (Differenzen).

Bestimme die Differenz Δf für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(n) = \binom{n}{2}$.

(ii) $f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ für $n \neq 0, -1$ und $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$.

(iii) $f(n) = n2^{n-1}$.

(iv) $f(n) = n^2 4^{n+2} + n^3$.

(v) $f(n) = \frac{2^{n+2}}{n^2+1}$.

(vi) $f(n) = n!2^n$.

(vii) $f(n) = (n-3)4^{n^2}$.

(viii) $f(n) = (n - 2^{-n})(n^2 2^n + 3)$.

Aufgabe 5 (Summation).

Sei $f(n) = \frac{(n+5)n}{4(n+1)(n+4)}$.

(i) Zeige $\Delta f(n) = \frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}$.

(ii) Berechne

$$\sum_{0\le k<n} \frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)}.$$

(iii*) Zeige $\frac{2(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+4)(k+5)} = \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3(k+4)} - \frac{1}{3(k+2)} + \frac{1}{3(k+5)}$ und bestimme mit dieser Information nochmal

$$\sum_{0\le k<n} \frac{2(k+3)}{(k+1)\,(k+2)\,(k+4)\,(k+5)}.$$

Aufgabe 6 (Summation).

Bestimme die diskrete Stammfunktion s zu k^3+3k, also $s(n) = \sum_{0\le k<n}(k^3+3k)$.

Aufgabe 7 (Differenzengleichung).

Löse die Differenzengleichung

$$\left(E^3 - 6E^2 + 11E - 6\right) f = 4, \qquad f(0) = 2, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0.$$

Tipp: Verwende den Ansatz $f_0(n) = an + b$ für die benötigte spezielle Lösung.

Zur Probe: Es ergibt sich $f(9) = -1002$ und $f(-1) = 1$.

Aufgabe 8 (Operatoren und Elemente).

Formuliere die Operatorgleichung

$$\Delta \circ M = M(\Delta, I) + M(I, \Delta) + M(\Delta, \Delta)$$

auf Elementebene, worin der Multiplikationsoperator M durch $M(f, g)(n) = f(n) \cdot g(n)$ definiert ist.

Aufgabe 9 (Krankheit).

An einer bestimmten Krankheit erkranken 2% einer Bevölkerungsgruppe. Um ein rechtzeitiges Erkennen der Krankheit zu ermöglichen, wird ein Test entwickelt, mit dem man folgende Erfahrungen macht: Der Test zeigt einen positven Befund in 95% der Fälle, in denen die Person wirklich erkrankt ist. Er zeigt aber auch einen positiven Befund in 10% der Fälle, in denen die Person tatsächlich nicht erkrankt ist.

(i) Es wird nun eine Person getestet, der Befund ist positiv. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person erkrankt?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank, obwohl der Befund negativ ist?

Aufgabe 10 (Gruppen).

Wir betrachten Teilmengen der symmetrischen Gruppe S_3 auf drei Elementen $\{1, 2, 3\}$.

(i) Ist $H = \{(), (12), (23)\}$ eine Untergruppe? Begründe Deine Antwort.

(ii) Ist $H = \{(), (12)\}$ ein Normalteiler? Begründe Deine Antwort.

(iii) Beweise, dass $H = \{(), (123), (132)\}$ ein Untergruppe ist.

(iv) Ist $H = \{(), (123), (132)\}$ ein Normalteiler? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 11 (Gruppen).

Betrachte die drei Gruppen

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \qquad \mathbb{Z}_{21}^\times, \qquad A_4.$$

(i) Bestimme jeweils die Ordung aller zwölf Elemente.

(ii) Beweise, dass $\mathbb{Z}_{21}^\times$ nicht zyklisch ist.

(iii) Beweise, dass A_4 nicht kommutativ ist.

(iv) Entscheide, welche Gruppen isomorph sind und welche nicht. Begründe Deine Antwort und gib gegebenenfalls einen Isomorphismus an.

Aufgabe 12 (Polynomdivision und ggT).

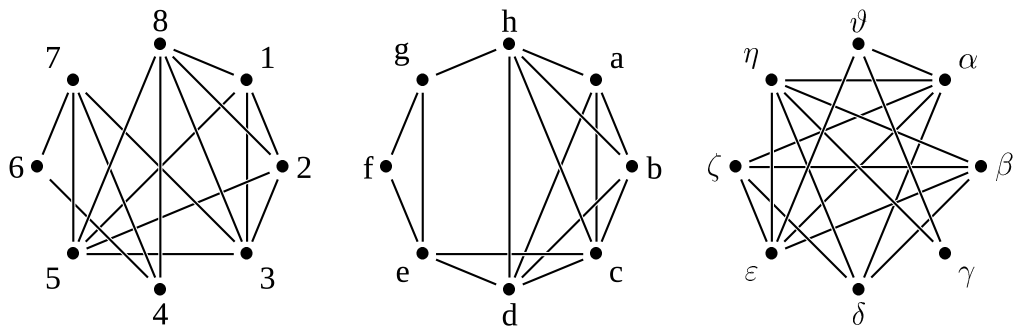
Bestimme den größten gemeinsamen Teiler g der Polynome

$$a = x^6 + 7\,x^5 - x^4 - 23\,x^3 - x^2 + 26\,x + 9,$$
$$b = x^5 + 6\,x^4 - 7\,x^3 - 17\,x^2 + 8\,x + 9$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und stelle g in der Form $sa + tb$ dar.

Aufgabe 13 (Graphen).

Betrachte die folgende drei Graphen:



(i) Gib die Inzidenzmatrix des linken Graphen an.

(ii) Gib eine Adjazenzmatrix des mittleren Graphen an.

(iii) Stelle fest, ob der rechte Graph einen Hamiltonkreis besitzt und begründe Deine Antwort.

(iv) Beweise, dass der linke Graph keine 4-Färbung besitzt.

(v) Beweise, dass der mittlere Graph nicht planar ist.

(vi) Finde eine 3-Färbung für den rechten Graphen mit den Farben R(rot), G(grün) und B(blau).

(vii) Zwei der Graphen sind isomorph, aber nicht alle drei. Welche zwei Graphen sind isomorph?

- Begründe Deine Antwort anhand von Eigenschaften der Graphen.
- Gib einen Isomorphismus an.

Aufgabe 14 (Folgen).

(i) Ist die Folge $a = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>17}}$ monoton? Beweise Deine Antwort.

(ii) Bestimme das Infimum der Folge a.

(iii) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{(2n+1)(n+4)}$.

Aufgabe 15 (Reihen).

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren, und beweise Deine Antwort.

(i) $\displaystyle\sum_{d=13}^{\infty} \frac{d^2+2^d}{3^{d^2}}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{(2n+1)(n+4)}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{t=10}^{\infty} \frac{(-1)^t}{\sqrt{t}\log_2\log_2(t)}$.

Aufgabe 16 (Potenzreihen).

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(\log\log k)^k} \cdot z^k$.

(iii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^j j!} \cdot z^j$.

Aufgabe 17 (Ableitungen).

Betrachte die Funktion

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x^4+x+1} \end{array} .$$

(i) Bestimme die Ableitung $f'(x)$.

(ii) Bestimme das Maximum der Funktion f.

(iii) Skizziere f.

(iv) Zu $x_0 = 0$ ist $f'(0) = 1$. Finde zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ein passendes $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt.

(v) Zeige explizit, dass der Differenzenquotient bei $x_0 = 0$ gegen 1 konvergiert.