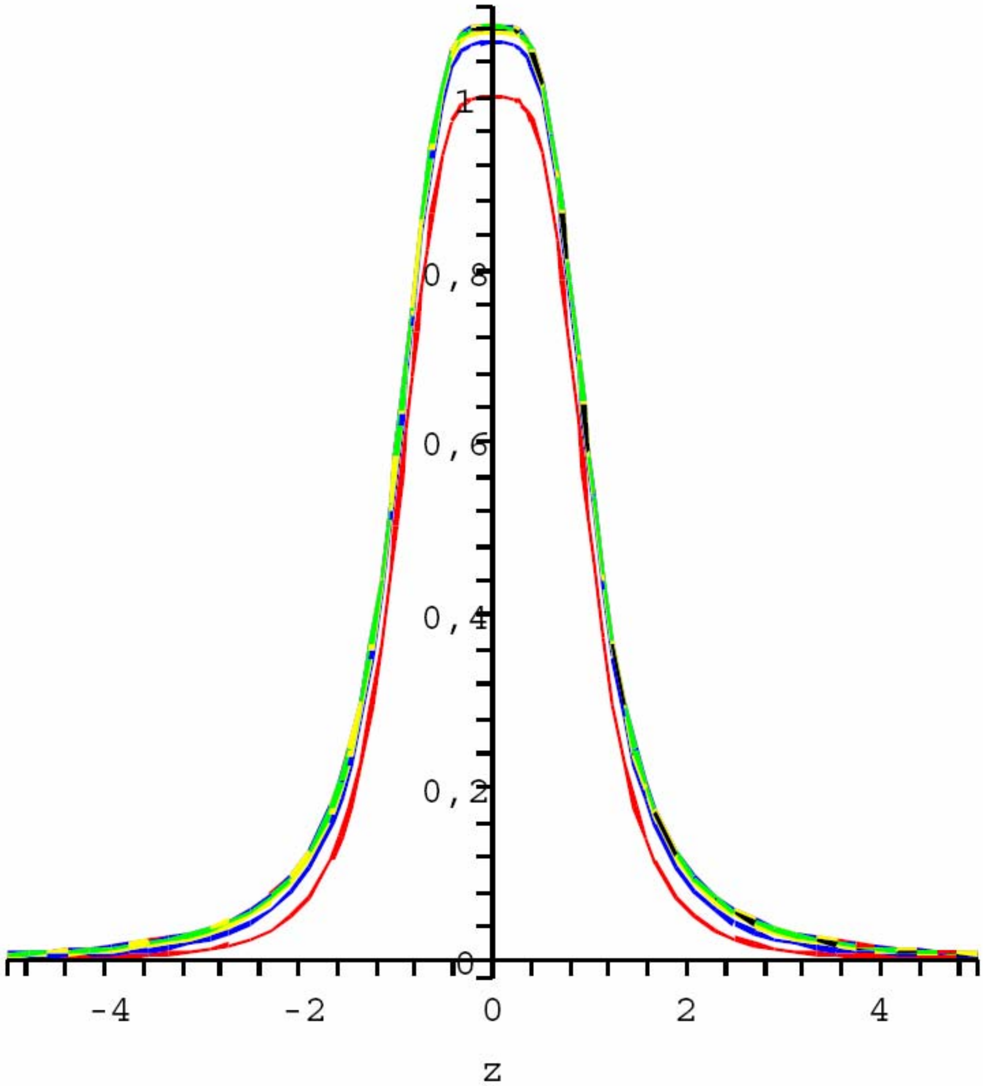
Aufgabe 12.1

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 + z^4}$ für $z \in \mathbb{R}$

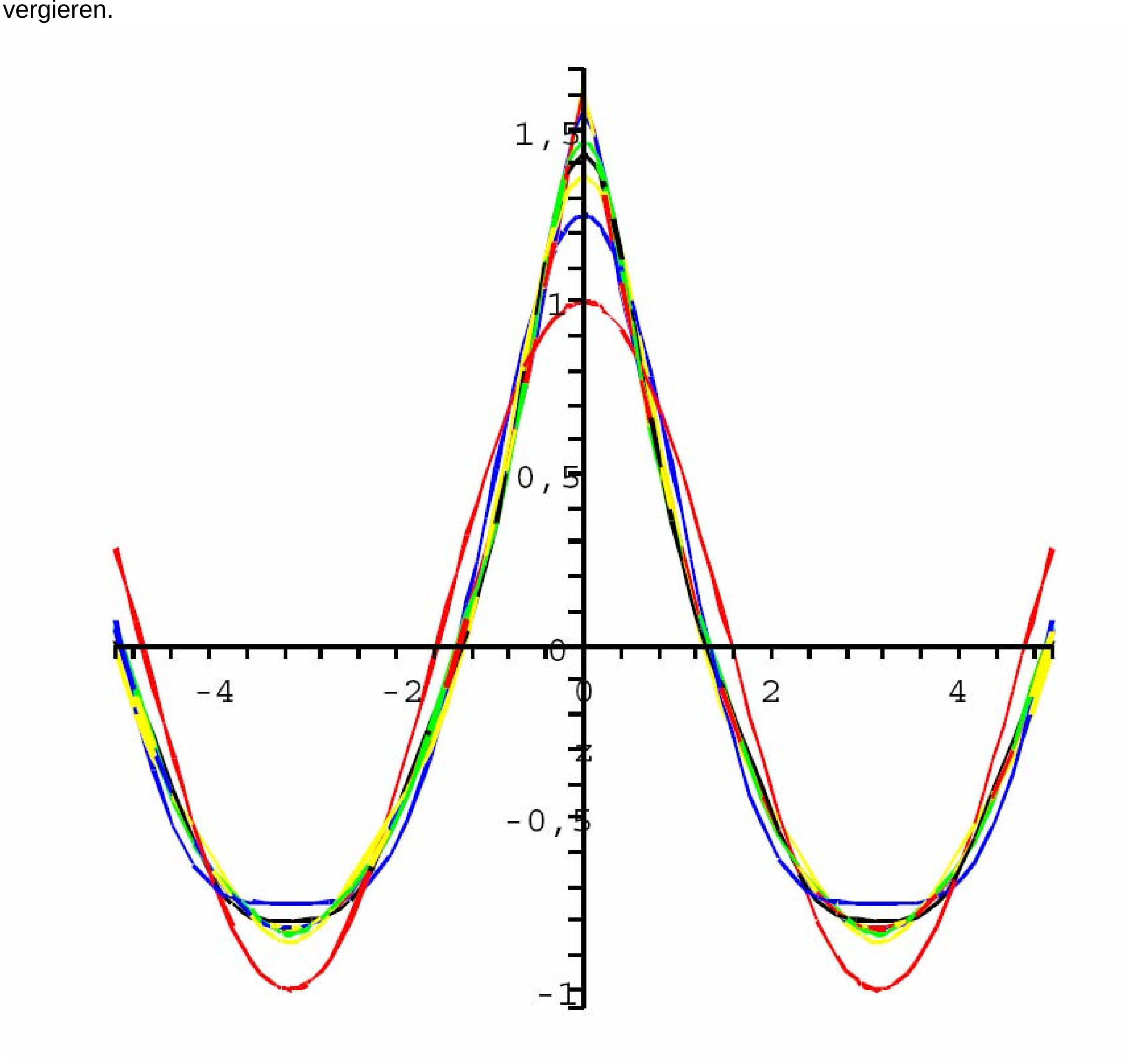
Auf diese Folge lässt sich das Majorantenkriterium anwenden. Man sieht, dass $\frac{1}{k^4+z^4} \leq \frac{1}{k^4} \leq \frac{1}{k^2}$.

Von der letzten Folge ist die Konvergenz bekannt, daher muss auch $\frac{1}{k^4+z^4}$ eine konvergente Nullfolge sein.
Die Summe konvergiert somit absolut.



(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(kz)$ für $z \in \mathbb{R}$

Auch auf diese Folge lässt sich das Majorantenkriterium anwenden. $\frac{1}{k^2}\cos(kz) \le \frac{1}{k^2}$ gilt immer, da der Kosinus maximal 1 sein kann. Da $\frac{1}{k^2}$ eine Nullfolge ist, muss auch $\frac{1}{k^2}\cos(kz)$ eine konvergente Nullfolge sein und die gesamte Summe absolut konvergieren.



Aufgabe 12.2

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} \cdot z^n$

Der Konvergenzradius lässt sich aus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = 0$ bestimmen. Da der Grenzwert 0 ist, konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{R}$.

(ii) $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^n}{n(\log n)^n}=\sum_{n=3}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n(\log n)^n}}_{a_n}\cdot z^n$$

Der Konvergenzradius lässt sich aus $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n(\log n)^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\log n}=0$ bestimmen. Da der Grenzwert 0 ist, konvergiert die Potenzreihe für alle $z\in\mathbb{R}$.

(iii) $$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(n+1)}_{a_n}\cdot z^n$$

Der Konvergenzradius lässt sich aus $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+1|}=1$ bestimmen. Da der Grenzwert bei 1 liegt, ist der Konvergenzradius 1. Die Potenzreihe konvergiert somit für alle $z\in\mathbb{R}_{<1}$ und divergiert für alle $z\in\mathbb{R}_{>1}$.

(iv) $$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{a_n}\cdot z^n$$

Der Konvergenzradius lässt sich aus $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}}$

Näherung: $(2n+1)!\geq\left(n+\frac{1}{2}\right)^n$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}}$$
$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$
$$=0$$

Da der Grenzwert 0 ist, konvergiert die Potenzreihe für alle $z\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 12.3

(i) $n^4\in O\left(n^5\right)$

Betrachtet man den Quotienten, so ergibt sich $\forall n\in\mathbb{N}_0:\frac{n^4}{n^5}=\frac{1}{n}\leq 1$

Da n^5 also schneller wächst als n^4 ist $n^4\in O\left(n^5\right)$.

(ii) $\frac{1}{42}n^3-n\in O\left(n^3\right)$

$$\forall n\in\mathbb{N}_0:\frac{\frac{1}{42}n^3-n}{n^3}=\frac{1}{42}-\frac{1}{n^2}<\frac{1}{42}$$

Für jedes beliebige n lässt sich also ein c finden, so dass gilt $\frac{1}{42}n^3-n<n^3$ (z.B. $c=1$).
Also gilt $\frac{1}{42}n^3-n\in O\left(n^3\right)$.

(iii) $\frac{3^n}{n^2} - n^{17} \in O(2^n)$

$$\frac{\frac{n^3}{n^2} - n^{17}}{2^n} = \frac{3^n}{n^2 \cdot 2^n} - \frac{n^{17}}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{3^n}{n^2} - n^{17} \notin O(2^n)$$

(iv) $n \log n \log\log n \in O(n^2)$

$$\forall n \mid 1 < n < 2 : \frac{n \log n \log\log n}{n^2} = \frac{\log n \log\log n}{n}$$

$$\Rightarrow n \log n \log\log n \in O(n^2)$$

(v) $\frac{n}{\log n} \in O(\sqrt{n})$

$$\frac{n}{\log n \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\log n} \notin O(\sqrt{n})$$

(vi) $n^4 \in \Omega(n^5)$

Betrachtet man den Grenzwert des Quotienten aus i, so ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Daraus folgt, dass $n^4 \notin \Omega(n^5)$, da sich kein c finden lässt, mit $n^4 \leq c \cdot n^5$ für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}_0$.

(vii) $\frac{1}{42} n^3 - n \in \Omega(n^3)$

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 7} : \frac{\frac{1}{42} n^3 - n}{n^3} = \frac{1}{42} - \frac{1}{n^2} > 0$$

Also gilt $\frac{1}{42} n^3 - n \in \Omega(n^3)$.

(viii) $\frac{3^n}{n^2} - n^{17} \in \Omega(2^n)$

$$\frac{\frac{3^n}{n^2} - n^{17}}{2^n} = \frac{3^n}{n^2 \cdot 2^n} - \frac{n^{17}}{2^n}$$

(ix) $n\log n\log\log n \in \Omega\left(n^2\right)$

$$\frac{n\log n\log\log n}{n^2} = \frac{\log n\log\log n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n\log\log n}{n} = 0$$

$$\Rightarrow n\log n\log\log n \notin \Omega\left(n^2\right)$$

(x) $\frac{n}{\log n} \in \Omega\left(\sqrt{n}\right)$

$$\frac{n}{\log n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log n} = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\log n} \in \Omega\left(\sqrt{n}\right)$$

Aufgabe 12.4

Beweis:

Laut Aufgabenstellung gilt $\frac{a_n+1}{a_n} \le q$. Dann lässt sich jedes a_n auch als $a_n \le q^n \cdot a_0$ darstellen.

Zu zeigen ist nun, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} q^i \cdot a_0$ absolut konvergiert. Dazu bestimmen wir den Konvergenzradius: $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_0|}} = 1$. Die Reihe konvergiert also für alle $|q| < 1$, was laut Voraussetzung immer der Fall ist.

Aufgabe 12.5

(i) Zu `triv_ifactor`:
Die Anzahl der ausgeführten Operationen pro Zeiteinheit auf dem benannten Rechner ergibt sich
durch

$$\text{Laufzeit}\cdot\frac{\text{Operationen}}{\text{Zeiteinheit}} = 47{,}717\,\text{sec}\cdot 700\ 000\ 000\frac{\text{Operationen}}{\text{Sekunde}} = 33\ 401\ 900\ 000\ \text{Operationen}$$

.

Über `triv_ifactor` ist bekannt, dass er eine Laufzeit von $\mathrm{O}\left(2^{n/2}\right)$ zur Faktorisierung der Zahlen benötigt.
Wenn man von „exakten“ Schranken ausgeht, ergibt sich für die Konstante:
Eingabezahl $n = 2^{28}$

$$33\ 401\ 900\ 000 = c\cdot 2^{\frac{2^{48}}{2}} \Leftrightarrow c = \frac{33\ 401\ 900\ 000}{4^{47}} = 1{,}651\ 024\ 082\cdot 10^{-18}$$

Zu `numlib::pollard`:
Wie zuvor bestimmt sich die Konstante als:

$$0{,}1\text{sec}\cdot 700\ 000\ 000\frac{\text{Operationen}}{\text{Sekunde}} = c\cdot 2^{\frac{2^{48}}{4}} \Leftrightarrow c = 1{,}413\ 638\ 742\cdot 10^{-20}$$

Zu `numlib::ecm`:

$$0{,}15\,\text{sec}\cdot 700\ 000\ 000\,\frac{\text{Operationen}}{\text{Sekunde}} = c\cdot 2^{\sqrt{2^{48}}} \Leftrightarrow c = 5{,}773\ 718\ 728\cdot 10^{-5\ 050\ 438}$$

Zu `ifactor`:

$$0{,}05\,\text{sec}\cdot 700\ 000\ 000\,\frac{\text{Operationen}}{\text{Sekunde}} = c\cdot 2^{\sqrt{2^{48}}} \Leftrightarrow c = 1{,}924\ 572\ 909\cdot 10^{-5\ 050\ 438}$$

(ii) Innerhalb eines Tages ($86\ 400\,\text{sec}$) wären Zahlen folgender Bitlängen faktorisierbar:
Zu `triv_ifactor`:

$$86\ 400\cdot 700\ 000\ 000 = c\cdot 2^{\frac{2^b}{2}} = c\cdot 4^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_4\left(\frac{84\ 600\cdot 7\cdot 10^8}{c}\right) = b-1$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_4 86\ 400+\log_4 7+\log_4 10^8-\log_4 c = b$$

$$\Leftrightarrow b = 53{,}430\ 816\ 36$$

Es lassen sich innerhalb eines Tages 53-bit-Zahlen faktorisieren.

Zu `numlib::pollard`:

$$86\ 400\cdot 700\ 000\ 000 = c\cdot 2^{\frac{2^b}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \log_4 \frac{86\ 400\cdot 7\cdot 10^8}{c} = b-2$$

$$\Leftrightarrow 2+\log_4 86\ 400+\log_4 7+\log_4 10^8-\log_4 c = b$$

$$\Leftrightarrow b = 57{,}860\ 335\ 89$$

Es lassen sich innerhalb eines Tages 57-bit-Zahlen faktorisieren.

Zu `numlib::ecm`:

$$86\ 400\cdot 700\ 000\ 000 = c\cdot 2^{\sqrt{2^b}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{86\ 400\cdot 7\cdot 10^8}{c} = \sqrt{2^b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right)-\log_2 c = \sqrt{2^b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right)+\log_2^2 c-2\cdot\log_2 c\cdot\log_2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right) = 2^b$$

$$\Leftrightarrow b = 48{,}000\ 003\ 29$$

Es lassen sich innerhalb eines Tages 48-bit-Zahlen faktorisieren.

Zu `ifactor`:

$$86\ 400\cdot 700\ 000\ 000 = c\cdot 2^{\sqrt{2^b}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{86\ 400\cdot 7\cdot 10^8}{c} = \sqrt{2^b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right)-\log_2 c = \sqrt{2^b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right)+\log_2^2 c-2\cdot\log_2 c\cdot\log_2\left(86\ 400\cdot 7\cdot 10^8\right) = 2^b$$

$$\Leftrightarrow b = 48{,}000\ 003\ 56$$

Es lassen sich innerhalb eines Tages 48-bit-Zahlen faktorisieren.