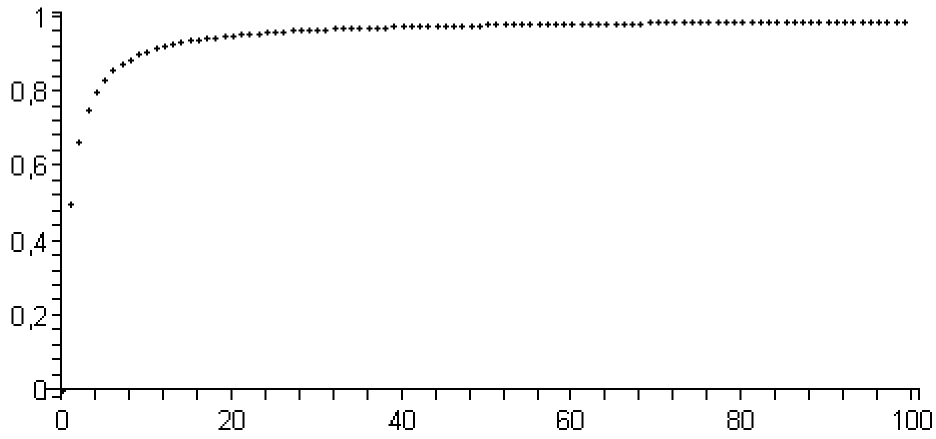
Aufgabe 11.1

- $a = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(i)



(ii) Die Folge ist streng monoton steigend, da gilt $a_{n+1} > a_n$.

Beweis:

$$a_{n+1} > a_n$$
$$\Rightarrow \left(\tfrac{n+1}{n+2}\right) > \left(\tfrac{n}{n+1}\right)$$
$$\Rightarrow (n+1)(n+1) > (n)(n+2)$$
$$\Rightarrow n^2 + 2n + 1 > \left(n^2 + 2n\right)$$
$$\Rightarrow 1 > 0$$

(iii) Die Folge ist nach oben beschränkt, da es ein A gibt mir $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < A$.

Beweis:

$$\frac{n}{n+1} < A$$
$$\Rightarrow n < (n+1) \cdot A$$
$$\Rightarrow n < n \cdot A + 1 \cdot A$$
$$\Rightarrow 0 < n \cdot (A-1) + A$$
$$\Rightarrow -n \cdot (A-1) < A$$
$$\Rightarrow n \cdot (1-A) < A$$
$$\Rightarrow n \overset{A>1}{>} \frac{A}{1-A}$$
$$\Rightarrow n \overset{A<1}{<} \frac{A}{1-A}$$
$$\Rightarrow n \overset{A>1}{>} -\frac{A}{A-1}$$
$$\Rightarrow n \overset{A>1}{>} -1 - \frac{1}{A-1}$$

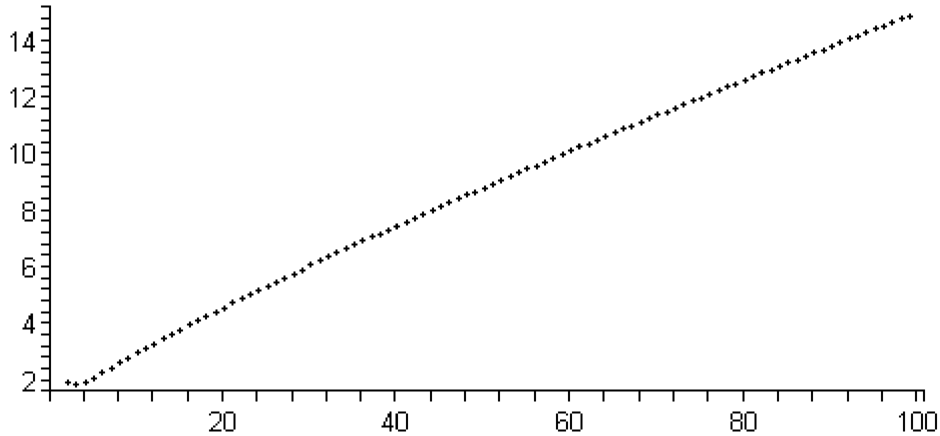
Für jedes $A > 1$ ist dies für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall.

(iv) Wie in iii gezeigt, handelt es sich um eine streng monoton wachsende Folge. Das Infinum liegt somit an der Stelle $a_0 = 0$.
Bei der Suche nach dem Supremum betrachten wir den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1}=1$$

- $b=\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$

(i)



(ii) Die Folge ist ab $n \geq 2$ streng monoton steigend, da gilt $a_{n+1} > a_n$, für $n \geq 2$.
Beweis:

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1} > a_n \\
\Rightarrow & \left(\frac{n+1}{\log_2(n+1)}\right) > \left(\frac{n}{\log_2 n}\right) \\
\Rightarrow & (n+1)\log_2 n > n\log_2(n+1) \\
\Rightarrow & (n+1)\log_2 n > n\log_2(n+1) \\
\Rightarrow & 2^{(n+1)\log_2 n} > 2^{n\log_2(n+1)} \\
\Rightarrow & n^{n+1} > (n+1)^n \\
\Rightarrow & \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > 1 \\
\Rightarrow & \frac{n^n \cdot n}{(n+1)^n} > 1 \\
\Rightarrow & n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1 \\
\Rightarrow & n\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}_{0\leq x\leq 1} > 1
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung ist gültig für $n > 1$. Ab diesem Punkt ist die Folge streng monoton steigend.

(iii) Die Folge ist nicht nach oben beschränkt, da es kein c gibt mit $a_n < c$.

$$\left(\frac{n}{\log_2 n}\right) < c$$

$$\Rightarrow n < \log_2 n \cdot c$$

$$\Rightarrow 2^n < n \cdot c$$

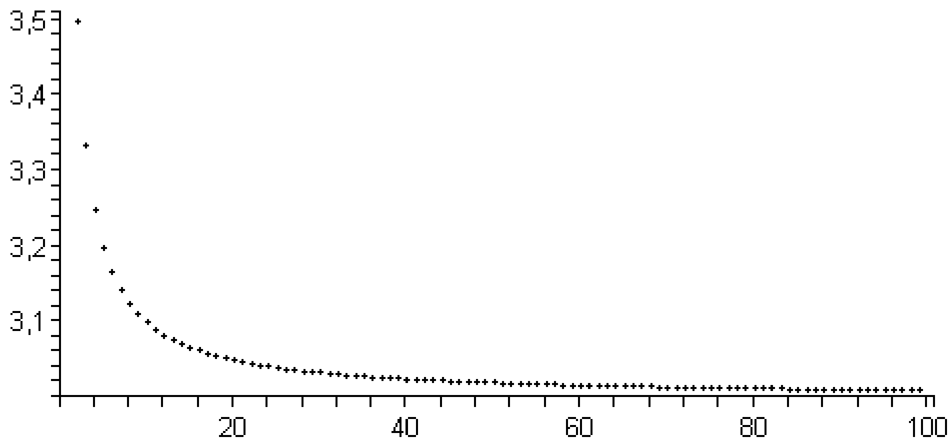
$$\Rightarrow \frac{2^n}{n} < c$$

Da 2^n exponentiell wächst, während der Nenner n nur linear wächst, kann es kein solches c geben.

(iv) Die die Folge nicht nach oben beschränkt ist, existiert kein Supremum für diese Folge. Das Infinum liegt bei $b_2 = 2$, da die Folge ab diesem Punkt streng monoton steigt.

o $c = \left(\frac{n}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(i)



(ii) Die Folge ist für $n \geq 2$ streng monoton fallend, da gilt $a_{n+1} < a_n$, für $n \geq 2$.
Beweis:

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1} < a_n \\
\Rightarrow & \frac{n+1}{(n+1)^2+3} < \frac{n}{n^2+3} \\
\Rightarrow & \left(n^2+3\right)(n+1) < n\left((n+1)^2+3\right) \\
\Rightarrow & \left(n^3+n^2+3n+3\right) < n\left(n^2+2n+4\right) \\
\Rightarrow & \left(n^3+n^2+3n+3\right) < \left(n^3+2n^2+4n\right) \\
\Rightarrow & 3 < \left(n^2+n\right) \\
\Rightarrow & \left(n^2+n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) > 3 \\
\Rightarrow & \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{13}{4} \\
\Rightarrow & n+\frac{1}{2} > \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \\
\Rightarrow & n > +\sqrt{\frac{13}{4}}-\frac{1}{2} \\
\Rightarrow & n > \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\
\Rightarrow & n \geq 2
\end{aligned}
$$

(iii) Die Folge ist nicht nach oben beschränkt, da es kein c gibt mit $a_n < c$.
Beweis:

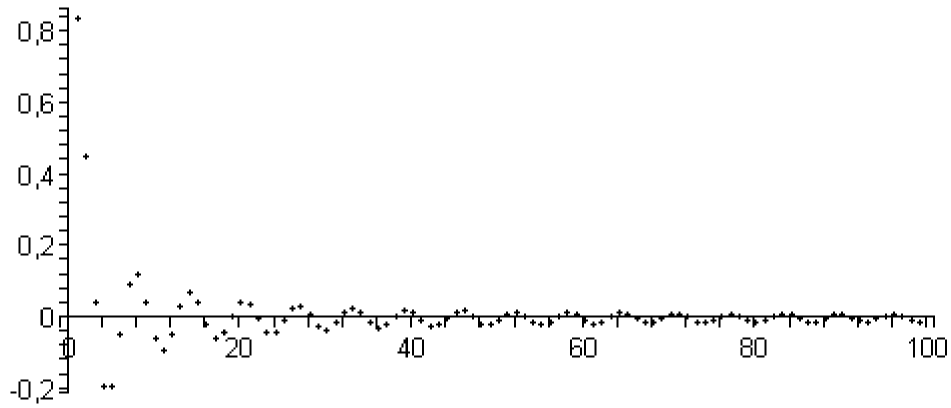
$$\left(\frac{n}{n^2+3}\right) < c$$
$$\Rightarrow n < \left(n^2+3\right)\cdot c$$
$$\Rightarrow -3c < cn^2 - n$$
$$\Rightarrow cn^2 - n > -3c$$
$$\Rightarrow c\left(n^2 - \frac{n}{c}\right) > -3c$$
$$\Rightarrow c\left(n - \frac{1}{2c}\right)^2 - c\cdot\frac{1}{4c^2} > -3c$$
$$\Rightarrow c\left(n - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c} > -3c$$
$$\Rightarrow \left(n - \frac{1}{2c}\right)^2 > \frac{1-12c^2}{4c^2}$$
$$\Rightarrow \left(n - \frac{1}{2c}\right) > \frac{\sqrt{1-12c^2}}{2c}$$
$$\Rightarrow n > \frac{1+\sqrt{1-12c^2}}{2c}$$

Das Supremum liegt also bei $c = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0,288675$

(iv) Die Folge ist ab $n \geq 2$ streng monoton fallend ist und daher kein größerer Wert auftreten kann. Da $c_1 < c_2$ muss das Supremum bei $c_2 = \frac{2}{7}$ liegen.
Das Infinum der Folge liegt bei $c(0) = 0$, da der Bruch im weiteren Verlauf der Folge nie kleiner als 0 werden kann.

- $d = \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$

(i)



(ii) Die Folge ist nicht monoton, da sie die Sinusfunktion enthält, welche nicht monoton ist.

(iii) Die Folge ist nicht monoton. Sie ist aber eine konvergente Nullfolge.
Somit müssen Infinum und Supremum relativ weit am Anfang der Folge liegen.
Da $d_4 > d_5 < d_6$ ist, muss das Infinum an der Stelle d_5 liegen. $\frac{\sin(5)}{5} \approx -0{,}1918$ ist also das Infinum.
Das Supremum ist $d_1 \approx 0{,}8415$.

(iv) Die Folge hat an der Stelle $d_1 \approx 0{,}8415$ ihr Supremum, denn der Zähler kann durch den Sinus nicht größer als 1 werden. Der Nenner ist an dieser Stelle minimal.
Auch das Infinum muss bei kleinem n liegen, da es sich um eine konvergierende Nullfolge handelt. Aufgrund des Sinus betrachten wir daher nur die ersten Werte für die $\sin(n)$ negativ ist. Dies ist für d_4, d_5, d_6 der Fall. Da $d_4 > d_5 < d_6$, also ist das Infinum $d_5 = \frac{\sin(5)}{5} \approx -0{,}1918$.

Aufgabe 11.2

(i) $a_n = \frac{n}{2^n}$

$$|a_n| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left|\frac{n}{2^n}\right| < 0{,}001$$
$$\Rightarrow n < 0{,}001 \cdot 2^n$$
$$\Rightarrow 1000n < 2^n$$
$$\Rightarrow \log_2 1000 + \log_2 n < n$$
$$\Rightarrow n - \log_2 n > \log_2 1000$$

Diese Aussage ist gültig für $n \geq 14$.

(ii) $a_n = \frac{1}{\log_2(n+2)}$

$$
\begin{aligned}
&|a_n| < \varepsilon \\
\Rightarrow &\left|\frac{1}{\log_2(n+2)}\right| < 0,001 \\
\Rightarrow &1000 < \log_2(n+2) \\
\Rightarrow &2^{1000} < n+2 \\
\Rightarrow &n > 2^{1000} - 2
\end{aligned}
$$

(iii) $a_n = \frac{n}{n^2+3}$

$$
\begin{aligned}
&|a_n| < \varepsilon \\
\Rightarrow &\left|\frac{n}{n^2+3}\right| < 0,001 \\
\Rightarrow &1000n < n^2 + 3 \\
\Rightarrow &n^2 - 1000n + 3 > 0 \\
\Rightarrow &(n-500)^2 - 500^2 + 3 > 0 \\
\Rightarrow &(n-500)^2 > 500^2 - 3 \\
\Rightarrow &n > 500 + \sqrt{500^2 - 3} \\
\Rightarrow &n \geq 1000
\end{aligned}
$$

(iv) $a_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}$

$$
\begin{aligned}
&|a_n| < \varepsilon \\
\Rightarrow &\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}\right| < 0,001 \\
\Rightarrow &1000 \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}_{\leq 1} < n \\
\Rightarrow &n > 1000
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.3

(i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^\nu}$

Wenn die Folge konvergent ist, muss es nach dem Quotientenkriterium ein q geben, mit $0 < q < 1$, sodass gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \le q \cdot a_n$.

$$a_{n+1} \le q \cdot a_n$$
$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)} \le q \cdot \frac{n!}{n^n}$$
$$\Rightarrow n^n \cdot (n+1)! \le q \cdot (n+1)(n+1) \cdot n!$$
$$\Rightarrow n^n \cdot (n+1)! \le q \cdot (n+1)^n (n+1)!$$
$$\Rightarrow n^n \le q \cdot (n+1)^n$$
$$\Rightarrow \frac{n^n}{(n+1)^n} \le q$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le q$$

Die Folge konvergiert also.

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^4}{3^j}$

Wenn die Folge konvergent ist, muss es nach dem Quotientenkriterium ein q geben, mit $0 < q < 1$, sodass gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \le q \cdot a_n$.

$$a_{n+1} \le q \cdot a_n$$
$$\Rightarrow \frac{(n+1)^4}{3(n+1)} \le q \cdot \frac{n^4}{3^n}$$
$$\Rightarrow (n+1)^4 \cdot 3^n \le q \cdot 3(n+1) \cdot n^4$$
$$\Rightarrow (n+1)^4 \cdot 3^n \le q \cdot 3^n \cdot 3 \cdot n^4$$
$$\Rightarrow (n+1)^4 \le q \cdot 3 \cdot n^4$$
$$\Rightarrow \frac{(n+1)^4}{3 \cdot n^4} \le q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^4}{n^4} \le q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \le q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \le 1$$

Das Kriterium ist für alle $n > 0$ erfüllt. Die Folge konvergiert also.

(iii) $\displaystyle\sum_{c=0}^{\infty}\frac{c+4}{c^2-3c+1}$

Wenn die Folge konvergent ist, muss es nach dem Quotientenkriterium ein q geben, mit $0<q<1$, sodass gilt $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}\le q\cdot a_n$.

$$a_{n+1}\le q\cdot a_n$$
$$\Rightarrow \frac{n+5}{(n+1)^2-3(n+1)+1}\le q\cdot\frac{n+4}{n^2-3n+1}$$
$$\Rightarrow (n^2-3n+1)(n+5)\le q\cdot(n^2-n+5)(n+4)$$
$$\Rightarrow (n^3+2n^2-14n+5)\le q\cdot(n^3+3n^2+n+20)$$
$$\Rightarrow \frac{n^3+2n^2-14n+5}{n^3+3n^2+n+20}\le q$$

Die Ungleichung ist nicht für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt. Also konvergiert diese Folge nicht,.

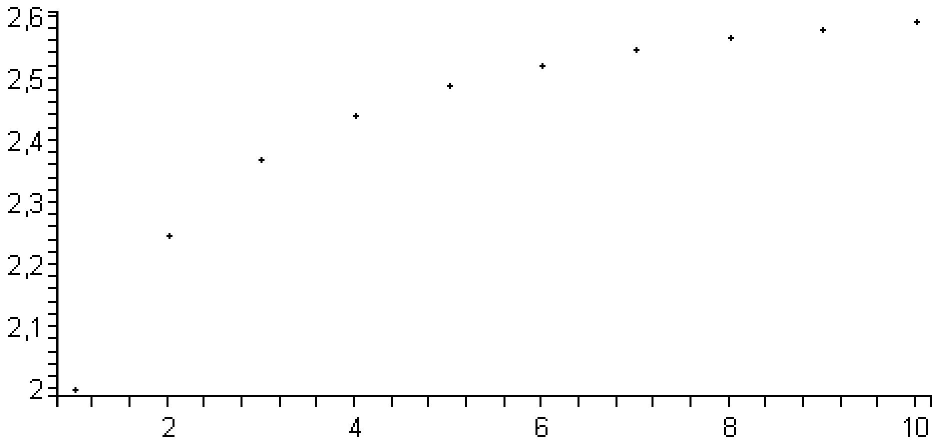
(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$

Es handelt sich um eine alternierende Folge. Nach dem Leibnitz-Kriterium konvergiert die Folge, wenn sie absolut konvergiert. Untersuchung mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k+1}}\le q\cdot\frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k\le q\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$
$$\Rightarrow \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k\le q\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$
$$\Rightarrow \left(\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)(k+1)}\right)^k\le q$$
$$\Rightarrow \left(\frac{k^2+2k}{k^2+2k+1}\right)^k\le q$$
$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)^k\le q$$

Aufgabe 11.5

(i)



(ii)

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k!n!}{k!(n-k)!n^k} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \le 1$$

$$\Leftrightarrow n^{\underline{k}} \le n^k$$

Diese Gleichung gilt für alle $n > 0$ und alle $k \ge 0$, da zwar die Anzahl der Faktoren auf beiden Seiten der Ungleichung gleich ist, jedoch auf der linken Seite immer kleinere Faktoren miteinander multipliziert werden.

(iii) Abschätzung 1 $a_n \geq 1$:

Da alle Summanden der Summe $1+\frac{1}{n}$ größer als 1 sind, kann das Produkt nicht kleiner als 1 werden.

Abschätzung 2 $a_n \leq \sum\limits_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$:

$$a_n \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n \leq n^n \cdot \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k n^{n-k} \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n^n}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!n^{n-k}}{k!(n-k)!} \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n^n}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!n^{n-k}}{k!(n-k)!} - \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n^n}{k!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!n^{n-k}}{k!(n-k)!} - \frac{n^n}{k!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!n^{n-k}}{k!(n-k)!} - \frac{n^n (n-k)!}{k!(n-k)!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{n!n^{n-k} - n^n (n-k)!}{k!(n-k)!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(n-k)!\left(n^{\underline{k}} n^{n-k} - n^n\right)}{k!(n-k)!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(n-k)! n^{n-k} \left(n^{\underline{k}} - n^k\right)}{k!(n-k)!} \leq 0$$

Nun können alle Faktoren der Summe abgeschätzt werden. Alle Faktoren bis auf $n^{\underline{k}} - n^k$ müssen positiv sein. $n^{\underline{k}} - n^k$ ist für $k > 1, n > 1$ negativ, daher wird die gesamte Summe negativ. Die Abschätzung ist somit korrekt und $a_n \leq \sum\limits_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$.

(iv)

$$(1+x)^n \geq (1+nx)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k \geq (1+nx)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq (1+nx)$$
$$\Leftrightarrow \quad 1+nx+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq (1+nx)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 0$$

Die Ungleichung ist für alle $x \geq 0$ und $n \geq 1$korrekt. Gleichheit gilt für $n = 1$ und $x = 0$.

(v) Ist die Folge monoton wachsend so muss gelten $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq 1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq 1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq 1$$
$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{(n+1)(n+1)}\right)^{n} \geq \frac{n+1}{n+2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{-1}{(n+1)(n+1)}\right)^{k} \geq 1-\frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow 1+\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{(-1)^k}{(n+1)^{2k}}\right) \geq 1-\frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{(-1)^k}{(n+1)^{2k}}\right) \geq -\frac{1}{n+2}$$

(vi) Cauchy-Kriterium: $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \left(a+\frac{1}{n^2+2n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} + \frac{n+1}{\left(n^2+2n\right)^n \cdot (n+2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{\left(n\cdot(n+2)\right)^n \cdot (n+2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{n^n \cdot (n+2)^{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n}{n^n \cdot (n+2)^{n+1}} + \frac{1}{n^n \cdot (n+2)^{n+1}}$$