11. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 19. Juli 2004, 12^{23} Uhr
in den jeweils richtigen Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 11.1 (Folgen). (10 Punkte)

Wir betrachten Folgen.

- $a = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c = \left(\frac{n}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $b = \left(\frac{n}{\log_2 n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$.
- $d = \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$.

Mit MAPLE lässt sich durch das Kommando

```
plots[pointplot]({seq([n,1/(n+1)],n=0..99)});
```

ein Bild der ersten hundert Werte der Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugen.

(i) Erstelle für jede der obigen Folgen ein solches Bild.

(ii) Entscheide für jede der obigen Folgen, ob sie monoton ist.

(iii) Entscheide für jede der obigen Folgen, ob sie nach oben beschränkt ist. Gib gegebenenfalls eine obere Schranke an.

(iv) Bestimme für jede der obigen Folgen Infimum und Supremum.

Aufgabe 11.2 (Konvergenz). (4 Punkte)

Die unten angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen. Bestimme zu $\varepsilon = 0.001$ jeweils ein N so, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

(i) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(iii) $a_n = \frac{n}{n^2+3}$.

(ii) $a_n = \frac{1}{\log_2(n+2)}$.

(iv) $a_n = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)}{n}$.

Aufgabe 11.3 (Reihen). (4 Punkte)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^\nu}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^4}{3^j}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{c=0}^{\infty} \frac{c+4}{c^2-3c+1}$, (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$.

Aufgabe 11.4 (Kettenbruch). (6 Punkte)

Betrachte den folgenden Kettenbruch:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Darunter versteht man die durch $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}$ definierte Folge. Zeige: Mit dem goldenen Schnitt $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ gilt

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}} \quad \text{und} \quad x_n \to \varphi.$$

***Aufgabe 11.5** (Eine besondere Folge). (0+12 Punkte)

Wir wollen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ untersuchen mit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(i*) Stelle die ersten 10 Folgenglieder graphisch dar (z.B. mit MAPLE, wie in Aufgabe 11.1.)

(ii*) Zeige, dass für alle natürlichen Zahl $n > 0$ und $k \geq 0$ die Ungleichung $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ gilt.

(iii*) Zeige, dass die Ungleichungen

$$1 \leq a_n \leq \sum_{0\leq k\leq n} \frac{1}{k!} < 3$$

gelten.

(iv*) Beweise die BERNOULLIsche Ungleichung: Für $x \geq -1$ und $n \geq 1$ gilt

$$(1+x)^n \geq (1+nx).$$

Wann gilt Gleichheit?

(v*) Die Folge (a_n) ist monoton wachsend ...

(vi*) ... und konvergiert.

(vii*) Für alle $m < n$ gilt $a_n > \sum_{0\leq k\leq m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k}$.

(viii*) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{0\leq k\leq m} \frac{1}{k!}$.

(ix*) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} =: \mathrm{e} \approx 2.718281828.$$

(x*) Folgere $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n = \mathrm{e}^2$.

Bemerkung: Es gilt allgemeiner $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \mathrm{e}^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$.

11. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 11.6 (Folgen).

Wir betrachten Folgen.

- $a = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c = \left(\frac{n-1}{n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $b = \left(\log_2 n\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$.
- $d = \left(\frac{\cos(\pi n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$.

(i) Erstelle für jede der obigen Folgen eine Skizze, bestimme dazu die ersten fünf bis zehn Werte.

(ii) Entscheide für jede der obigen Folgen, ob sie monoton ist.

(iii) Entscheide für jede der obigen Folgen, ob sie nach oben beschränkt ist. Gib gegebenenfalls eine obere Schranke an.

(iv) Bestimme für jede der obigen Folgen Infimum und Supremum.

Mündliche Aufgabe 11.7 (Kettenbruch).

Die Absicht der Pythagoräer, am regelmäßigen Fünfeck die Kommensurabilität von Diagonale und Seite nachzuweisen, führte sie auf den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Darunter versteht man die durch $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}$ definierte Folge. Nimm an, dass die Folge konvergiert, und setze $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass die Gleichung

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

gilt und außerdem $x \geq 1$ gelten muss.

Mündliche Aufgabe 11.8 (Grenzwert).

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\sqrt{49n^2 + n + 3} - 7n\right).$$

(i) Bestimme a_n für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 12$. [Welches Verhalten vermutest Du nun?]

(ii) Ist die Folge nach unten beschränkt?

(iii) Ist die Folge monoton?

(iv) Ist die Folge nach oben beschränkt?

(v) Ist die Folge konvergent? Wenn ja, welchen Grenzwert hat sie?

Beweise Deine Antworten!

Mündliche Aufgabe 11.9 (Reihen en masse).

Untersuche mindestens vier der folgenden Reihen auf Konvergenz. Sprecht Euch untereinander ab, wer was löst, sodass in jeder Übungsgruppe jede Reihe mindestens einmal bearbeitet wird.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2+n}{n^3+1}$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| \frac{3\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}+1} + \alpha \right|$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5-4n^2}{n^6+n}$,

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n\cdot 2^n}{3^n}$,

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n}$,

(vi) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+7n+2)\frac{3^n}{4^{n+1}}$,

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{4n}^{-1}$,

(viii) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha^n$ für $|\alpha| < 1$,

(ix) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log_2(1+2/n)}{(\log_2 n)(\log_2(n+1))}$,

(x) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^3 \left(\frac{1+e}{\pi}\right)^{1-n}$,

(xi) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$.

Dabei ist $\alpha \in \mathbb{C}$ vorgegeben.

☺**Mündliche Aufgabe 11.10** (Achilles und die Schildkröte).

Achilles und die Schildkröte veranstalten einen Wettlauf. Achilles, einer der schnellsten Läufer seiner Zeit, gewährt der Schildkröte natürlich einen Vorsprung.

Das Rennen wird gestartet und jeder erwartet natürlich, dass Achilles gewinnen wird. Doch was passiert? Als Achilles den Punkt erreicht, an dem die Schildkröte gestartet war, ist diese bereits ein Stück weiter. Doch als Achilles auch dieses Stück überwunden hat, ist die Schildkröte wiederum ein Stück weitergekommen. Doch als Achilles …

So kommt es, dass Achilles von der Schildkröte doch besiegt wird, obwohl er viel — sagen wir zehnmal — schneller ist als diese und nur — sagen wir — 100m aufzuholen hatte.

Kannst Du erklären, was hier passiert?