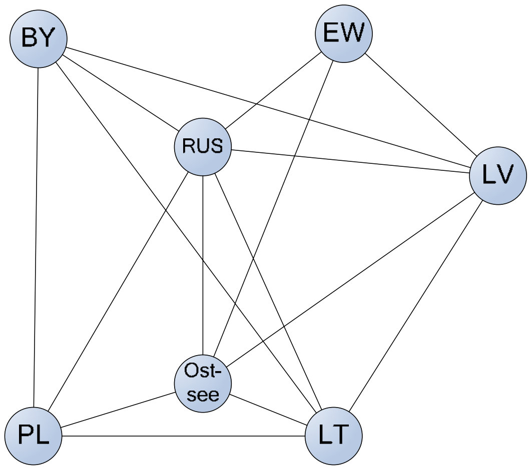
Digitally signed by Bernhard Dietrich
DN: CN = Bernhard Dietrich, C = DE, L = 33098 Paderborn, S = Deutschland
Reason: I am the author of this document
Date: 2004.07.12 10:15:35 +02'00'

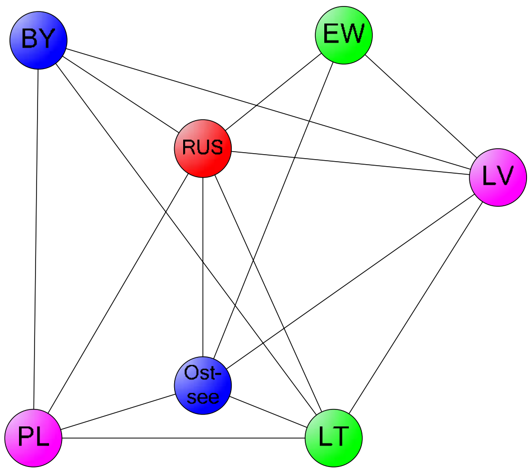
Aufgabe 10.1

(i)

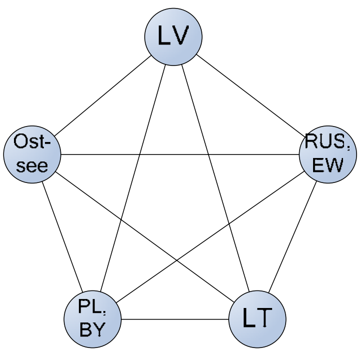


(ii) Nach Euler gilt für planare Graphen $|K| \leq 3|E| - 6$, für diesen Graphen würde sich also $16 \leq 21 - 6 \Leftrightarrow 16 \leq 15$ ergeben. Diese Aussage ist jedoch falsch, daher kann der Graph nicht planar sein.

(iii)



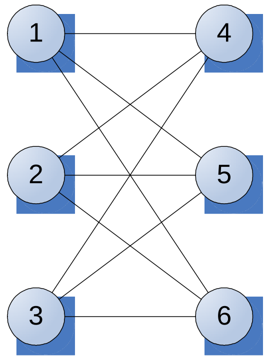
(iv)



Auf einen $K_{3,3}$ lässt sich der Graph nicht zusammenziehen.

Aufgabe 10.2

(i) Da in einem $K_{3,3}$ kein Knoten mit einem Knoten auf der gleichen Seite verbunden ist, kann man auf einem beliebigen Weg im Graphen mit 3 Knoten vom 3. Knoten nicht direkt zum 1. Knoten zurück gelangen. Somit gibt es kein Dreieck (Weg im Graphen der über 3 Knoten führt.)



(ii) Lässt man Sonderfälle mit nur einer Facette außer acht, wie sie z.B. bei Graphen mit nur einem oder zwei Knoten vorhanden sind, benötigt man mindestens drei Knoten und drei Kanten um einen Kreis zu bilden, der dann eine Facette einschließt, die dann drei Kanten hat. Lässt man nun diesen Dreierkreis nicht zu, benötigt man mindestens vier Knoten und auch vier Kanten für einen Kreis, welcher dann eine Facette mit vier Kanten einschließt. Folglich hat in der Darstellung eines planaren Graphen ohne Dreierkreis jede Facette mindestens vier Kanten.

(iii) Zu zeigen: Ein einfacher, planarer Graph ohne Dreieck hat höchstens $2 \cdot \# E - 4$ Kanten.
Beweis durch zweifaches Abzählen:

$$\#\{(k,f) \mid f \text{ Facette}, k \text{ Kante}, k \text{ grenzt an } f\}$$
$$= \sum_{k \in K} \#\{f \mid k \text{ grenzt an } f\} \leq 2 \cdot \# K$$
$$= \sum_{k \in K} \#\{k \mid k \text{ grenzt an } f\} \geq \underbrace{4 \cdot \# F}_{\text{Da kein Dreieck enthalten}}$$
$$\Rightarrow 2\# K \geq 4\# F$$

Nach Euler gilt:

$$|E| - |K| + |F| = 2$$
$$\Rightarrow 4|E| - 4|K| + \underbrace{4|F|}_{\leq 2|K|} = 8$$
$$\Rightarrow 4|E| - 2|K| \geq 8$$
$$\Rightarrow -2|K| \geq -4|E| + 8$$
$$\Rightarrow |K| \leq 2|E| - 4$$

(iv) Zu zeigen: Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

In i wurde bereits gezeigt, dass $K_{3,3}$ keine Dreierkreise enthält. Wenn $K_{3,3}$ planar wäre, müsste also die in iii gezeigte Ungleichung gelten:

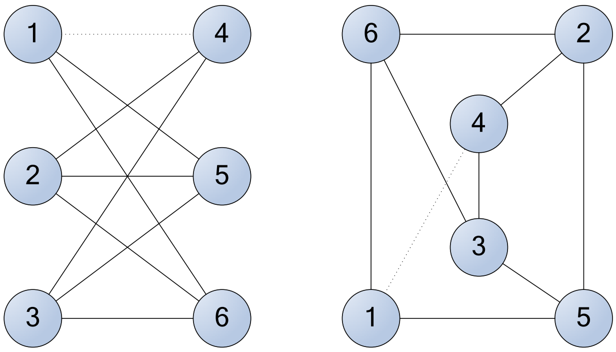
$$|K| \leq 2|E| - 4$$
$$\Rightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4$$
$$\Rightarrow 9 \leq 8$$

Diese Aussage ist falsch, folglich kann $K_{3,3}$ nicht planar sein.

Created
www.MSGetTheFacts.com

Aufgabe 10.3

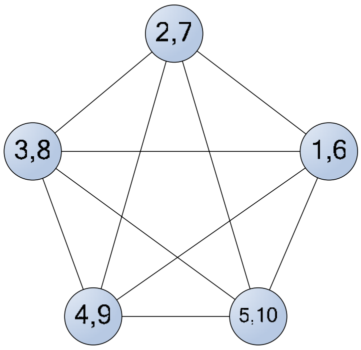
(i)



Wie man sieht, lässt sich G_1 planar darstellen.

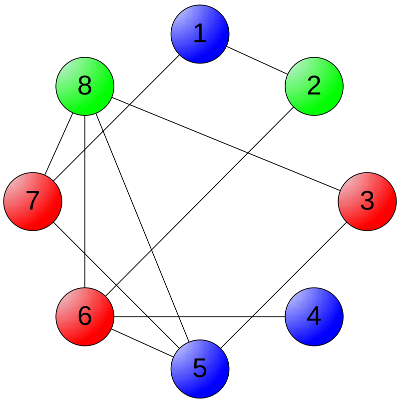
(ii) Entfernt man zwei Kanten aus K_6 erhält man einen Graphen mit $|E| = 6$ und $|K| = 13$. Eingesetzt in die Euler-Formel erhält man $|K| \leq 3|E| - 6 \Leftrightarrow 13 \leq 18 - 6 \Leftrightarrow 13 \leq 12$. Da diese Aussage falsch ist, kann aus K_6 entstandene Graph G_2 nicht planar sein.

(iii) G_3 kann nicht planar sein, denn er lässt sich auf einen K_5 zusammenziehen:



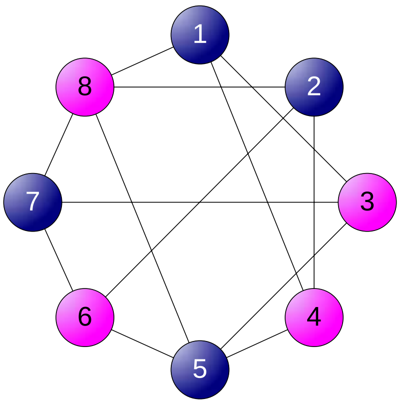
Aufgabe 10.4

(i)



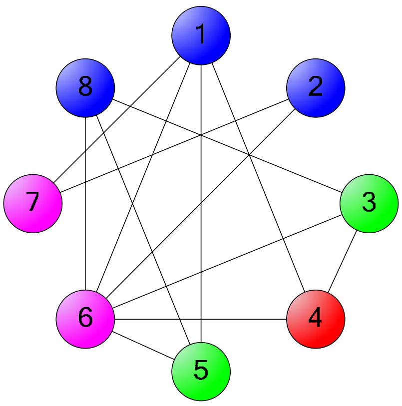
Der Graph ist 3-färbar. Er ist nicht 2-färbbar, da er mehrere Dreierkreise enthält (z.B. 5-6-8).

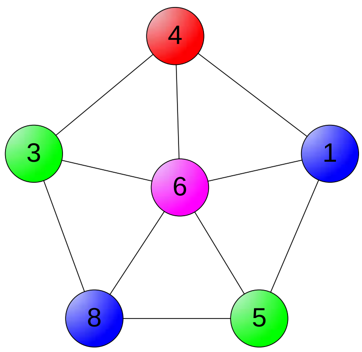
(ii)



Der Graph ist bipartit und somit 2-färbbar. Er kann nicht 1-färbbar sein, da er Kanten enthält.

(iii)





Teilgraph

Der Graph ist 4-färbbar. Betrachtet man den abgebildeten Teilgraphen, sieht man, dass für jedes der Dreiecke drei Farben reichen, bis man beim letzten Dreieck angelangt ist. Da die Anzahl der Knoten auf dem Kreis um die 6 ungerade ist, funktioniert hier das abwechselnde wählen der Farben blau und grün nicht mehr. Damit sich nicht zwei grüne oder blaue Knoten benachbarn, wird eine vierte Farbe nötig (in diesem Fall rot).

Created
Microsoft® Windows® Powered
www.MSGetTheFacts.com

Aufgabe 10.5

Betrachtet man den Fußball genauer, so stellt man fest, dass jede Ecke an einem Fünfeck hängt und keine zwei Fünfecke eine Ecke gemeinsam haben. Hieraus folgt, dass die Anzahl der Ecken gleich der fünffachen Anzahl der Fünfecke ist.
Jedes Fünfeck hat genau 5, jedes Sechseck genau 6 Kanten. Da in jeder Ecke genau 2 Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen muss gelten:

$$\#E = \frac{6\cdot\#F_6}{2} = 5\cdot\#F_5 ,$$

mit F_6 : Anzahl Sechsecke und F_5 : Anzahl Fünfecke.

Für die Kanten gilt $\#K = \frac{6\cdot\#F_6+5\cdot+F_5}{2}$, da jeweils zwei Flächen an eine Kante angrenzen.
Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt $\#E - \#K + \#F = 2$.
Eingesetzt ergibt sich:

$$5\cdot\#F_5 - \frac{6\cdot\#F_6 + 5\cdot F_5}{2} + \left(\#F_5 + \#F_6\right) = 2 .$$

Mit $\#F_6 = \frac{5}{3}\#F_5$ ergibt sich:

$$5\cdot\#F_5 - \frac{6\cdot\frac{5}{3}\#F_5 + 5\cdot\#F_5}{2} + \left(\#F_5 + \frac{5}{3}\#F_5\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot\#F_5 - \frac{15}{2}\#F_5 + \left(\#F_5 + \frac{5}{3}\#F_5\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{45}{6}\#F_5 + \left(\frac{46}{6}\#F_5\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\#F_5\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \#F_5 = 12$$

Es ergeben sich also 12 Flächen mit 5 Ecken und $\#F_6 = \frac{5}{3}\#F_5 = 20$ Flächen mit 6 Ecken.

Created
Microsoft® Windows® Powered
www.MSGetTheFacts.com