

10. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Montag, 12. Juli 2004, 12²³ Uhr
in den jeweils richtigen Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 10.1 (Baltikum).

(5 Punkte)

Betrachte die baltischen Staaten und deren Umgebung. (Auf der Webseite findet sich die Karte in einer höheren Auflösung.)



- (i) Betrachte auch die Ostsee als eine Region und bestimme den zugehörigen Graphen B . [Beachte, dass die Region um Kaliningrad (früher Königsberg) ein Teil von Russland ist.]
- (ii) Ist dieser Graph planar?
- (iii) Ist dieser Graph 4-färbbar? Falls ja, wie?
- (iv) Kann dieser Graph auf einen $K_{3,3}$ oder einen K_5 zusammengezogen werden? Falls ja, wie? [Zusammenziehen bedeute hier, dass wiederholt Kanten oder Punkte gelöscht oder Kanten zu einem Punkt zusammengezogen werden dürfen.]

Aufgabe 10.2 ($K_{3,3}$).

(5 Punkte)

Hier soll gezeigt werden, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist. Bearbeite dazu folgende Schritte:

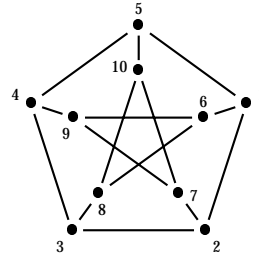
- (i) Der Graph $K_{3,3}$ enthält kein Dreieck (= Kreis mit drei Punkten).
- (ii) In der Darstellung eines planaren Graphen ohne Dreieck hat jede Facette wenigstens vier Kanten.
- (iii) Ein einfacher, planarer Graph ohne Dreieck hat höchstens $2\#E - 4$ Kanten.
- (iv) Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Aufgabe 10.3 (Planar oder nicht?).

(4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Graphen planar sind:

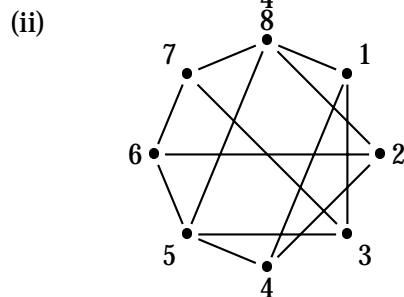
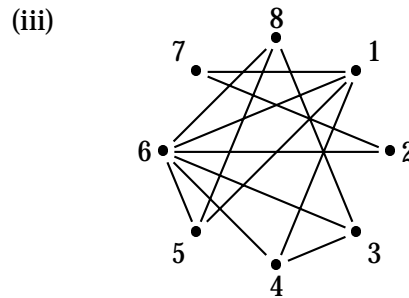
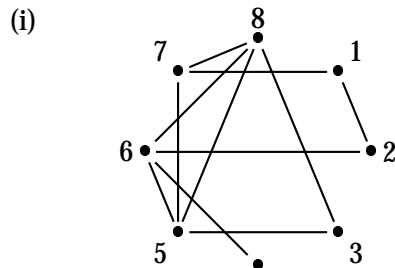
- (i) Der Graph G_1 entstehe aus $K_{3,3}$ durch Entfernen einer beliebigen Kante.
- (ii) Ein Graph G_2 entstehe aus K_6 durch Entfernen zweier Kanten. [Der vollständige Graph K_6 auf 6 Punkten besteht aus sechs Punkten und allen 15 möglichen Kanten.]
- (iii) Der Graph G_3 sei folgender:



Aufgabe 10.4 (Färbungen).

(6 Punkte)

Finde für die folgenden Graphen Färbungen mit möglichst wenig Farben:



⊙ Aufgabe 10.5 (Fußball).

(0+4 Punkte)

Ein Fußball wird aus Fünfecken und Sechsecken zusammengenäht, wobei in jeder Ecke genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen. Wieviele Fünf- und wieviele Sechsecke braucht man? [Hinweis: Eulersche Polyederformel.]

Übrigens: mit einem Sechseck und zwei Fünfecken in jeder Ecke würde es nicht funktionieren.

[Tipp: Zähle Mengen wie $\left\{ (f, k) \left| \begin{array}{l} f \text{ Fläche,} \\ k \text{ Kante,} \\ k \subset f \end{array} \right. \right\}$ oder $\left\{ (p, e) \left| \begin{array}{l} p \text{ Fünfeck,} \\ e \text{ Ecke,} \\ e \in p \end{array} \right. \right\}$.]

10. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker II, SS 2004, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN & MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 10.6 (Mitteleuropa 1815).

Betrachte die nebenstehende (vereinfachte) Karte von Mitteleuropa nach dem Wiener Kongress.



- (i) Betrachte auch das Meer als eine Region und bestimme den zugehörigen Graphen B . [Beachte, dass Preußen und Bayern aus je zwei Teilen bestehen.]
- (ii) Ist dieser Graph planar?
- (iii) Ist dieser Graph 4-färbbar? Falls ja, wie?
- (iv) Kann dieser Graph auf einen $K_{3,3}$ oder einen K_5 zusammengezogen werden? Falls ja, wie?

[Zusammenziehen bedeute hier, dass wiederholt Kanten oder Punkte gelöscht oder Kanten zu einem Punkt zusammengezogen werden dürfen.]

Mündliche Aufgabe 10.7 (K_5).

Hier soll wiederholt werden, dass K_5 nicht planar ist. Bearbeite dazu folgende Schritte:

- (i) Der Graph K_5 enthält Kreise mit drei Punkten.
- (ii) In der Darstellung eines planaren Graphen hat jede Facette wenigstens *drei* Kanten.
- (iii) Ein planarer Graph hat höchstens $3\#E - 6$ Kanten.
- (iv) Der Graph K_5 ist nicht planar.

Mündliche Aufgabe 10.8 (Planar oder nicht?).

Entscheide, ob die folgenden Graphen planar sind:

- (i) Der Graph G_4 entstehe aus K_5 durch Entfernen einer beliebigen Kante.
- (ii) Der Graph G_5 entstehe aus K_7 durch Entfernen einer ganzen Hamiltonkreises.
- (iii) Der Graph G_{6a} entstehe aus G_3 aus Aufgabe 10.3(iii) durch Entfernen der Kante $\{8, 10\}$.
- (iv) Der Graph G_{6b} entstehe aus G_3 aus Aufgabe 10.3(iii) durch Entfernen der Kante $\{1, 6\}$.

Mündliche Aufgabe 10.9 (Färbungen).

Finde für die folgenden Graphen Färbungen mit möglichst wenig Farben:

