Johannes Blömer
u.v.a.m.

Paderborn, den 18. Juli 2004

Musterlösungen zur Vorlesung

Datenstrukturen und Algorithmen

SS 2004

Blatt 12

AUFGABE 1:
Sei T der minimale Spannbaum von $G = (V, E)$, in dem die Kante (u, v) enthalten ist. Entfernen wir die Kante (u, v) aus T, zerfällt der Baum T in zwei Zusammenhangskomponenten Z_1, Z_2. Sei C die Menge der Knoten der Zusammenhangskomponente Z_1. Die Menge der Knoten der Zusammenhangskomponente Z_2 ist dann $V - C$. Weiter ist $(C, V - C)$ ein Schnitt des Graphen G. Wir behaupten, dass (u, v) ein leichte Kante des Schnitts $(C, V - C)$ ist. Um dieses zu beweisen, nehmen wir an, dass (u, v) keine leichte Kante des Schnitts ist. Sei dann (x, y) eine Kante, die den Schnitt $(C, V - C)$ ebenfalls kreuzt und für die gilt $w((x, y)) < w((u, v))$. Wir betrachten den Teilgraphen $T' = T - \{(u, v)\} \cup \{(x, y)\}$. Dann ist T' ein Spannbaum von G, da ja die Kante (x, y) die Zusammenhangskomponenten Z_1, Z_2 von $T - \{(u, v)\}$ wieder verbindet. Weiter muss gelten

$$w(T') = w(T) - w((u, v)) + w((x, y)) < w(T),$$

wobei die letzte Ungleichung aus $w((x, y)) < w((u, v))$ folgt. Damit muss dann T' echt kleineres Gewicht haben als T. Da aber T ein minimaler Spannbaum ist, ist dieses unmöglich. Daher kann es die Kante (x, y) nicht geben und (u, v) ist eine leichte Kante des Schnitts $(C, V - C)$.

AUFGABE 2:
Der Teilgraph G erfülle die in der Aufgabe genannten Bedingungen. Um zu zeigen, dass H ein Spannbaum ist, genügt es zu zeigen, dass H ein Baum ist.
Um zu zeigen, dass H ein Baum ist, nehmen wir an, dass H kein Baum ist und zeigen, dass H dann Eigenschaft b) nicht erfüllen kann. Ist H kein Baum auf den Knoten von G, aber ein zusammenhängender Teilgraph auf den Knoten von G, so muss H einen Kreis K enthalten. Wir betrachten nun eine beliebige Kante e von G, die auf dem Kreis K liegt. Entfernen wir e aus dem Graphen H, um so den Graphen $H - \{e\}$ zu erhalten, so sehen wir, dass auch $H - \{e\}$ noch ein zusammenhängender Teilgraph von G ist. Für das Gewicht von $H - \{e\}$ gilt

$$w(H - \{e\}) = w(H) - w(e) < w(H),$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Annahme, dass alle Kanten in G positives Gewicht haben, folgt. Also hat $H - \{e\}$ geringeres Gewicht als H. Damit erfüllt H Eigenschaft b) nicht. Wie oben bereits erläutert, folgt dann die Aussage der Aufgabe.

AUFGABE 3:
Wir betrachten den gewichteten Graphen aus Abbildung 1. Dieser Graph besitzt einen eindeutigen minimalen

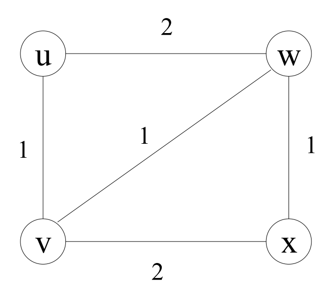

Abbildung 1: Gewichteter Graph (G, w) für Aufgabe 3

Spannbaum bestehend aus den Kanten $(v, u), (v, w), (w, x)$. Nun wird eine Breitensuche gestartet im Knoten

v den Breitensuchbaum bestehend aus den Kanten $(v, u), (v, w), (v, x)$ liefern. Dieses ist nicht der gerade beschreibene eindeutige Suchbaum des Graphen.
Eine Tiefensuche gestartet im Knoten v kann mehrere unterschiedliche Tiefensuchbäume liefern. Wird in einer Tiefensuche gestartet im Knoten v als erstes die Kante (v, x) genomemen, so können wir als Tiefensuchbaum nicht mehr den eindeutigen minimalen Spannbaum des Graphen erhalten, denn dieser enthält die Kante (v, x) nicht. Startet die Tiefensuche hingegen mit der Kante (v, u), so wird die Tiefensuche als nächste Kante die Kante (u, w) dem Tiefensuchbaum hinzufügen. Auch diese Kante liegt nicht im minimalen Spannbaum. Somit kann auch die so gestartete Tiefensuche nicht den minimalen Spannbaum liefern. Als letzte Möglichkeit bleibt nun noch, dass die Tiefensuche mit der Kante (v, w) startet. Als nächstes müssen dann die Kanten (w, x) und (w, u) dem Tiefensuchbaum hinzugfügt werden. Dieses allerdings liefert auch nicht den eindeutigen minimalen Spannbaum des Graphen. Somit liefert keine im Knoten v gestartete Tiefensuche den minimalen Spannbaum des Graphen. Der Graph aus Abbildung 1 zusammen mit dem Knoten v hat daher die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft.

AUFGABE 4:
Der vom Algorithmus von Prim berechnete minimale Spannbaum ist in Abbildung 2 dargestellt. Die Kanten

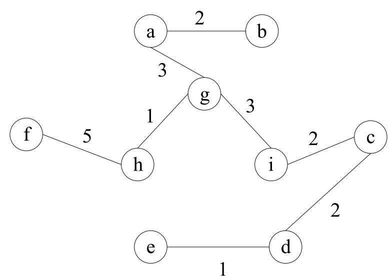

Abbildung 2: Minimaler Spannbaum zu Aufgabe 4

des Baums werden dabei in folgender Reihenfolge in den Baum eingefügt

$$(a, b), (a, g), (g, h), (g, i), (i, c), (c, d), (d, e), (h, f).$$