Datenstrukturen und Algorithmen: Blatt 9

Bernhard Dietrich (6256800)
Lars Fernhomberg (6256030)
Sebastian Kniesburges (6257120)
Marcus Köthenbürger (6258550)

Übungsgruppe 11
Mittwoch, 11:00-13:00 Uhr in D1.303
Matthias Ernst

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Korrektor
Punkte							
von	4	4	6	2	6	22	

Aufgabe 1

1. Die Hashfunktion $h(k,i)$ für lineares Hashen lautet $h(k,i)=\left(h'(k)+i\right)\operatorname{mod} m$.
   Mit $h'(k)=k \operatorname{mod} 11$ ergeben sich für $k=15$ die Werte 4,5,6 welche getestet werden, da sowohl die Position 4 als auch 5 bereits besetzt sind.
2. Die Hashfunktion für doppeltes Hashen lautet $h(k,i)=\left(h_1(k)+ih_2(k)\right)\operatorname{mod} m$ mit $h_1(k)=k \operatorname{mod} 11$ und $h_2(k)=1+\left(k \operatorname{mod} 10\right)$, werden beim Einfügen eines Objektes mit $k=15$ folgende Positionen getestet: 4, 10.

Aufgabe 2

Laut Vorlesung beträgt die erwartete Anzahl von Tests bei einer erfolgreichen Suche höchstens $\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\frac{1}{1-\alpha}$ und bei einer nicht erfolgreichen Suche $\frac{1}{1-\alpha}$. Mit $\alpha=\frac{3}{4}$ ergibt sich für die erfolgreiche Suche eine erwartetet Anzahl von Tests von $2\frac{2}{3}$ bzw. für die nicht erfolgreiche Suche von 4. Mit $\alpha=\frac{7}{8}$ ergeben sich entsprechend eine erwartete Anzahl von Tests von $3\frac{3}{7}$ für die erfolgreiche bzw. 8 für die nicht erfolgreiche Suche.

Aufgabe 3

Bei der i-ten Einfügung sind bereits $i-1$ Elemente enthalten, also $\alpha=\frac{i-1}{m}$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Test $\frac{m-i}{m}$. Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Anz. Tests}\geq k+1)$ entspricht $1-P(\text{Anz. Tests}\leq k)$.
Es gilt weiterhin $P(\text{Anz. Tests}\leq k)=P(\text{Anz. Tests}=1)+P(\text{Anz. Tests}=2)+\ldots+P(\text{Anz. Tests}=k)$.
Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Anz. Tests}=j)$ mit $1\leq j\leq k$ berechnet sich wie folgt:

$$P(\text{Anz. Tests}=j)=\frac{(i-1)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}}\cdot\frac{m-i}{m}.$$

$x^{\underline{y}}$ entspricht der fallenden Fakultät also $x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(y-1))$.

Da $i \le n \le \frac{m}{2}$, gilt: $P(\text{Anz. Tests} = j) = \frac{(i-1)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{m-i}{m} \le \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{m-\frac{m}{2}}{m}$.

Dabei ist jeder Faktor von $\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m-l}$ (mit $0 \le l \le (j-1)-1 < \frac{1}{2}$), also

ist $\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} < 2^{-(j-1)}$, da $\frac{m-\frac{m}{2}}{m} = \frac{1}{2}$ ist, also $P(\text{Anz. Tests} = j) \le \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{m-\frac{m}{2}}{m} \le 2^{-j}$.

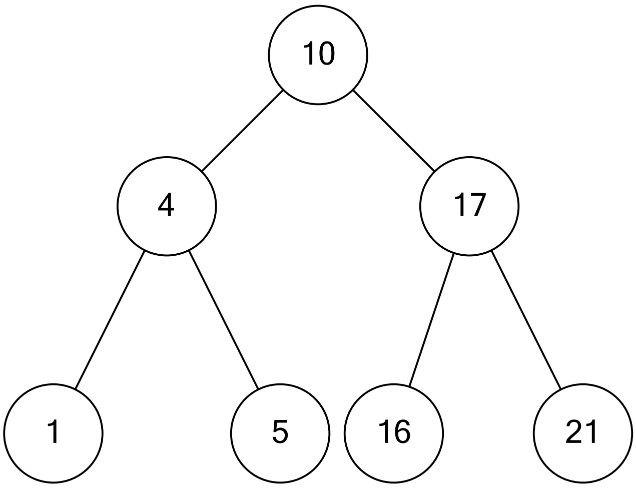
Es folgt also $P(\text{Anz. Tests} \le k) \le \sum_{j=1}^{k} 2^{j} = (1-2^{-k})$ womit

$P(\text{Anz. Tests} \ge k+1) = 1-(1-2^{-k}) = 2^{-k}$.

Also ist die Wahrscheinlichkeit für mind. $k+1$ Tests höchstens 2^{-k}.

Aufgabe 4

Es ergibt sich folgender binäre Suchbaum.



Aufgabe 5

Wie Aufgabe 4 zeigt lässt sich ein Suchbaum sehr leicht aus einem sortierten Array aufbauen in dem man immer den Median als Wurzel des Teilbaums nimmt. Zum sortieren braucht ein Vergleichsortierer, welcher hier verwendet werden muss da nur Vergleiche als Operationen zur Verfügung stehen, $\Omega(n \log n)$. Das Suchen des Medianes in einem sortierten Array und das Anhängen des Objekts mit diesem Schlüssel an den Elternknoten benötigt $\Omega(1)$. Da n Schlüssel vorhanden sind und alle in den Suchbaum eingefügt werden wird das Suchen des Medianes und das Anhängen n-mal durchgeführt also $\Omega(n)$. Also $\Omega(n) + \Omega(n \log n) = \Omega(n \log n)$.