Johannes Blömer
u.v.a.m.

Paderborn, den 24. Juni
Abgabe 7. Juli 2004, 11:00 Uhr, Kästen Flur D3

Übungen zur Vorlesung

Datenstrukturen und Algorithmen

SS 2004

Blatt 10

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten binäre Suchbäume.

1. In einen zunächst leeren Suchbaum werden nacheinander Knoten mit den Schlüsseln $5, 3, 6, 1, 2, 9, 8, 10$ eingefügt. Wie sieht der Suchbaum nach diesen Operationen aus? (2 Punkte)
2. Aus dem Suchbaum aus dem ersten Teil der Aufgabe werden die Knoten mit den Schlüsseln $6, 5, 1$ nacheinander entfernt. Wie sieht der Suchbaum nach diesen Operationen aus? (2 Punkte)

AUFGABE 2 (6 Punkte)**:**
Gegeben eine Menge von Objekten mit unterschiedlichen Schlüsseln aus $\mathbb{N}$, soll die Operation Select(i) das Objekt mit dem i-kleinsten Schlüssel bestimmen. Erweitern Sie die Datenstruktur der binären Bäume so, dass sie neben den Wörterbuchoperationen Insert, Search, usw. auch die Operation Select unterstützt. Beschreiben Sie dazu informell, wie die Operation Select realisiert werden soll und wie ggf. die Operationen Insert und Delete angepasst werden müssen. Die Laufzeit für Select soll $\mathcal{O}(h)$ sein, wobei h die Höhe des Baums T ist.
Hinweis: Es dürfen zusätzliche Informationen in einem Knoten gespeichert werden.

AUFGABE 3 (6 Punkte)**:**
AVL-Bäume sind eine Alternative zu den Rot-Schwarz-Bäumen, d.h. sie sind binäre Suchbäume, die alle Wörterbuchoperationen effizient unterstützen. Um AVL-Bäume zu definieren, benutzen wir zunächst dieselben Konventionen wie bei Rot-Schwarz-Bäumen, d.h., besitzt ein Knoten ursprünglich nur ein Kind oder keine Kinder, so werden zusätzliche NIL-Knoten eingefügt. Diese NIL-Knoten nennen wir *externe* Knoten. Die normalen, mit Schlüsseln versehenen Knoten nennen wir *innere Knoten.* Ein Baum T ist nun ein AVL-Baum, wenn für jeden Knoten x des Baums die Höhe des rechten Teilbaums von x und die Höhe des linken Teilbaums von x sich höchstens um 1 unterscheiden.

1. Zeigen Sie, dass ein AVL-Baum mit Höhe h mindestens $F_h - 1$ innere Knoten enthält. Dabei ist F_i die *i-te Fibonaccizahl* und es gilt
$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ und } F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \text{ für } i \geq 1.$$
(4 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass für die Höhe h eines AVL-Baum T mit n Knoten gilt $h = \mathcal{O}(\log(n))$. Sie dürfen hierbei benutzten, dass es eine Konstante $c > 1$ gibt, so dass $F_h = \Omega(c^h)$. (2 Punkte)

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Betrachten Sie den Rot-Schwarz-Baum in Abbildung 1. Dabei sind die Grau unterlegten Knoten die schwarzen Knoten, der nicht unterlegte Knoten mit Schlüssel 12 ist rot. Fügen Sie in diesen Baum mithilfe der Algorithmen RB-Insert und RB-Insert-Fixup Knoten mit den Schlüsseln 19 und 8 ein. Beschreiben Sie hierzu jeweils die einzelnen Zwischenergebnisse des Algorithmus RB-Insert-Fixup. Sie sollten dabei die Seite 28 der Folien zu Rot-Schwarz-Bäumen als Maßstab nehmen.

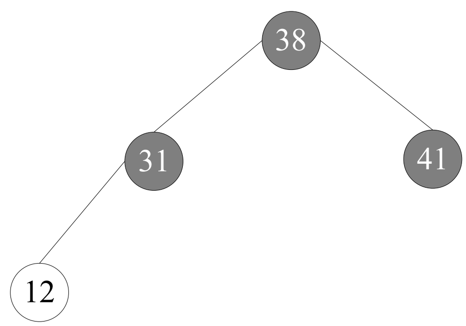

Abbildung 1: Rot-Schwarz-Baum