Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 16. Januar 2004
Abgabe 26. Januar 2004

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 12 Musterlösungen

AUFGABE 79 :
Gegeben sei folgender reguläre Ausdruck: $(01|00)^{+}11(010)^{*}$. Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G = (V, T, P, S)$ an, die genau diese Sprache erzeugt.

Lösung:
Es gibt mehrere Möglichkeiten eine Grammatik für diesen regulären Ausdruck zu bauen.
Eine mögliche Grammatik wäre $G = (\{0, 1\}, \{S, A, B\}, P, S)$ mit den Produktionen:

$$\begin{array}{lllllll} S & \rightarrow & 01A & | & 00A & & \\ A & \rightarrow & 01A & | & 00A & | & 11B \\ B & \rightarrow & 010B & | & \epsilon & & \end{array}$$

AUFGABE 80 :
Geben sei folgende Grammatik $G = (\{0, 1\}, \{S, A, B, C\}, P, S)$:

$$P: \quad \begin{array}{lllll} S & \rightarrow & 00A & | & 0 \\ A & \rightarrow & 01B & & \\ B & \rightarrow & 1A & | & 0C \\ C & \rightarrow & 11 & & \end{array}$$

a) Geben Sie zu dieser Grammatik G eine Grammatik G' an, die nur Produktionen der Form $X \rightarrow bY$ oder $Z \rightarrow \epsilon$ hat, wobei b ein einzelner Buchstabe aus der Menge der Terminale ist und X, Y, Z Nicht-Terminalzeichen sind, so dass gilt: $L(G) = L(G')$

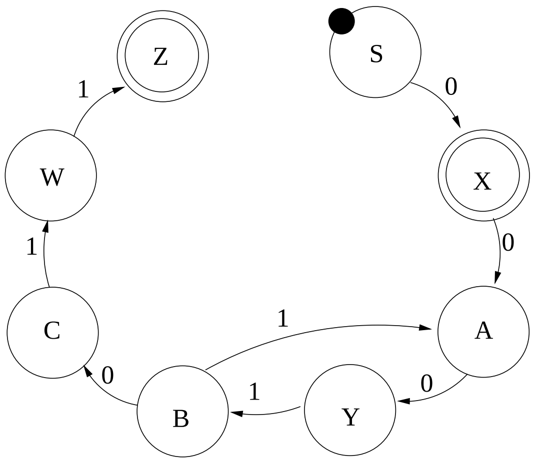
b) Geben Sie anschließend einen deterministischen endlichen Automaten A an, für den gilt: $L(G) = L(G') = L(A)$

Lösung:

a) Eine mögliche Grammatik G':
$G' = (\{S, A, B, C\} \cup \{W, X, Y, Z\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

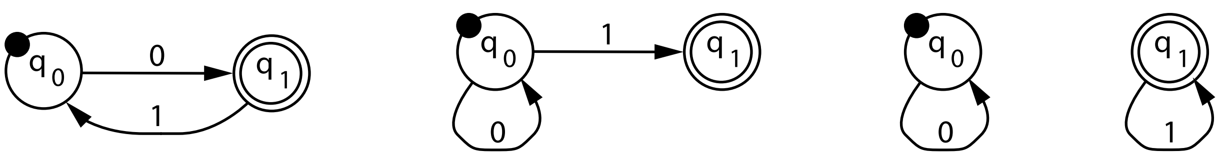
$$
\begin{array}{lrcll}
P: & S & \rightarrow & 0X & \\
 & X & \rightarrow & 0A & \mid \; \epsilon \\
 & A & \rightarrow & 0Y & \\
 & Y & \rightarrow & 1B & \\
 & B & \rightarrow & 1A & \mid \; 0C \\
 & C & \rightarrow & 1W & \\
 & W & \rightarrow & 1Z & \\
 & Z & \rightarrow & \epsilon &
\end{array}
$$

b) Ein passender DEA zur Grammatik:



AUFGABE 81 :
Gegeben sei ein DEA $A = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ mit zwei Zuständen und einer injektiven δ-Funktion. Zeigen Sie, dass dieser Automaten unendlich viele Wörter w mit $|w| > 3$ akzeptiert, wenn er ein Wort der Länge 3 akzeptiert.

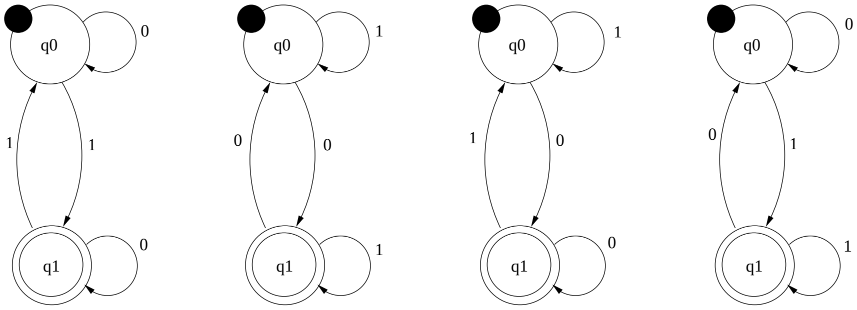
Lösung:
Eine injektive δ-Funktion bedeutet:
δ injektiv $:\Leftrightarrow \forall q, q' \in Q, \forall b, b' \in \Sigma : (\delta(q, b) = \delta(q', b') \Rightarrow q = q'$ und $b = b')$.
Da nur zwei Werte im Bildbereich vorhanden sind, müssen wir δ für mindestens zwei der vier möglichen Argumentetupel undefiniert lassen. Für diese Auswahl der zwei bzw. drei undefinierten Stellen gibt es $\binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 10$ Möglichkeiten, für die Funktionswerte der anderen beiden Argumentetupel gibt es zwei Möglichkeiten, also insgesamt 20 mögliche Automaten, die einzeln geprüft werden müssen. Beispiele sind die folgenden Automaten:



Der erste Automat akzeptiert das Wort 010 und wegen $\delta(q_0, 01) = q_0$ auch $(01)^*0$. Der erste Automat akzeptiert das Wort 001 und wegen $\delta(q_0, 0) = q_0$ auch 0^*01. Der dritte Automat akzeptiert kein Wort der Länge 3.
Nehmen wir es mit der Injektivität nicht so streng und fordern

$$\{\delta(q, 0), \delta(q, 1)\} = \{q_0, q_1\}$$

für alle $q \in \{q_0, q_1\}$, dann müssen von jedem Zustand zwei Übergänge möglich sein, von denen einer zum Zustand selbst zurückführt und einer zum jeweils anderen.
Insgesamt ergeben sich daraus 4 DEAs, die diese Eigenschaft erfüllen:



Betrachtet man den ersten Automaten, sieht man, dass er das Wort 010 akzeptiert. Will man nun zeigen, dass der Automat unendlich viele Worte w mit $|w| > 3$ akzeptiert, muss man in diesem Wort wie zuvor das Teilwort identifizieren, das von einem Zustand aus wieder zu diesem Zustand führt. In diesem Fall ist dies die erste 0, also akzeptiert der Automat auch 0^*10. Achtung: Bei diesem regulären Ausdruck handelt es sich nicht um die Sprache des Automaten. Es ist lediglich eine unendliche Teilsprache des Automaten!!!
Gleiches gilt analog für die anderen Automaten mit 001 und $(00)^*1$ bzw. mit 100 und 1^*00 bzw. 111 und 11^*1.

KORREKTURAUFGABE 82 :
Seien die Grammatiken G_1 =({S_1,A},{0,1}, P_1, S_1) und G_2 =({S_2,B},{0,1}, P_2, S_2) mit folgenden Produktionen gegeben:

$$P_1 : \quad \begin{array}{rcl} S_1 & \rightarrow & 0A \mid 11A \\ A & \rightarrow & 0A \mid 1 \end{array} \qquad P_2 : \quad \begin{array}{rcl} S_2 & \rightarrow & 0B \\ B & \rightarrow & 0B \mid 1B \mid 1 \end{array}$$

a) Geben sie die regulären Ausdrücke an, die die beiden Sprachen beschreiben.

b) Geben Sie eine Grammatik G_3 an, welche die Konkatenation der von G_1 und G_2 erzeugten Sprachen produziert.

c) Geben Sie eine Grammatik G_4 an, welche den Durchschnitt der von G_1 und G_2 erzeugten Sprachen produziert.

d) Geben Sie eine Grammatik G_5 an, welche die Vereinigung der von G_1 und G_2 erzeugten Sprachen produziert.

Lösung:

a) Als reguläre Ausdrücke ergeben sich:
zu G_1: $(0|11)0^*1$
zu G_2: $0(0|1)^*1$

b) Um die Grammatik zur Konkatenation zu bilden, betrachten wir noch einmal die Produktionen von G_1 und G_2 sowie die regulären Ausdrücke. Der reguläre Ausdruck zur Konkatenation der Sprachen lautet $(0|11)0^*10(0|1)^*1$. Nur wenn in P_1 das Nicht-Terminal A nach 1 abgeleitet wird, ist das Wort „fertig". Also ändern wir die Regel an genau dieser Stelle ab und ersetzen A nicht mehr durch 1 sondern durch $1S_2$ (siehe Folie VII-52). Die Menge V wird die Vereinigung von V_1 und V_2. Es ergibt sich:

$G_3 = (\{S_1, S_2, A, B\}, \{0, 1\}, P_3, S_1)$ mit

$$
\begin{array}{llllll}
P_3\text{:} \quad & S_1 & \rightarrow & 0A & | & 11A \\
& A & \rightarrow & 0A & | & 1S_2 \\
& S_2 & \rightarrow & 0B & & \\
& B & \rightarrow & 0B & | & 1B \quad | \quad 1
\end{array}
$$

c) Betrachtet man die regulären Ausdrücke genau, so erkennt man, dass der Durchschnitt der dargestellten Sprachen durch 00^*1 beschrieben werden kann. Also genügt es in G_1 die Ableitung von S_1 nach $11A$ zu entfernen. Es ergibt sich:
$G_4 = (\{S_1, A\}, \{0, 1\}, P_4, S_1)$ mit

$$
\begin{array}{llllll}
P_3\text{:} \quad & S_1 & \rightarrow & 0A & & \\
& A & \rightarrow & 0A & | & 1
\end{array}
$$

d) In der Vereinigung der Sprachen sind alle Worte enthalten, die in der Sprache von G_1 oder in der von G_2 waren oder in beiden. Als regulärer Ausdruck wäre dies $((0|11)0^*1 \mid 0(0|1)^*1)$. Wir nehmen also unsere beiden Regelmengen von G_1 und G_2 und starten mit einem neuen Startsymbol S, das zu S_1 bzw. S_2 führt. Dann ergibt sich: $V_5 = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$. Insgesamt ergibt sich:
$G_5 = (\{S, S_1, S_2, A, B\}, \{0, 1\}, P_5, S)$ mit

$$
\begin{array}{llllll}
P_3\text{:} \quad & S & \rightarrow & S_1 & | & S_2 \\
& S_1 & \rightarrow & 0A & | & 11A \\
& A & \rightarrow & 0A & | & 1 \\
& S_2 & \rightarrow & 0B & & \\
& B & \rightarrow & 0B & | & 1B \quad | \quad 1
\end{array}
$$

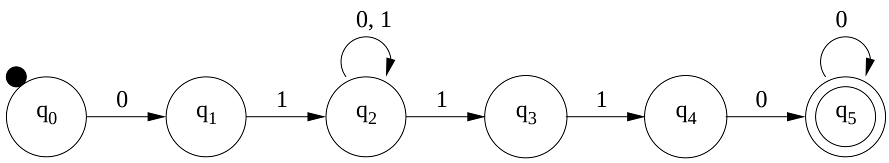
AUFGABE 83 :

a) Entwerfen Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A zu der durch den regulären Ausdruck $01(0|1)^*110^+$ beschriebenen Sprache.

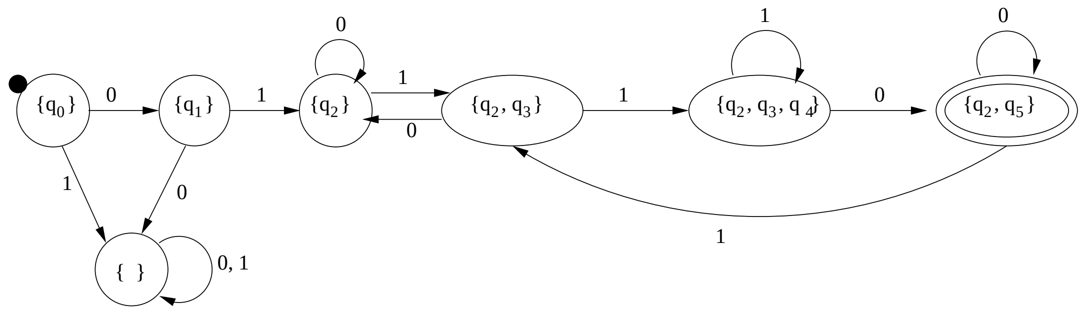
b) Konstruieren Sie aus A einen deterministischen endlichen Automaten mittels der Potenzmengenkonstruktion.

Lösung:

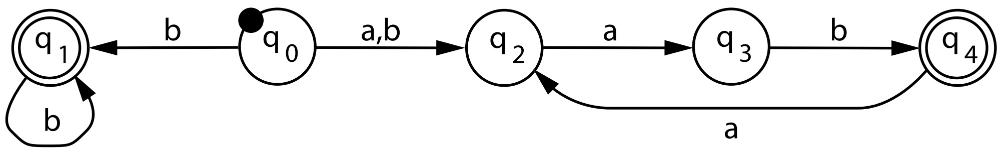
a) Der NEA:



b) Der DEA



AUFGABE 84 :
Geben Sie einen regulären Ausdruck an zu der Sprache $L(A)$, die von dem folgenden nichtdeterministischen Automaten A mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$ akzeptiert wird.



Lösung:
$(b^+|(a|b)ab(aab)^*)$

AUFGABE 85 :
Betrachten Sie die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ und den folgenden Produktionen

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0A \\ A & \rightarrow & 0A \\ A & \rightarrow & 1A \\ A & \rightarrow & 1B \\ B & \rightarrow & 0 \\ B & \rightarrow & 1 \end{array}$$

a) Geben Sie drei Wörter an, die zu der von G erzeugten Sprache $L(G)$ gehören.

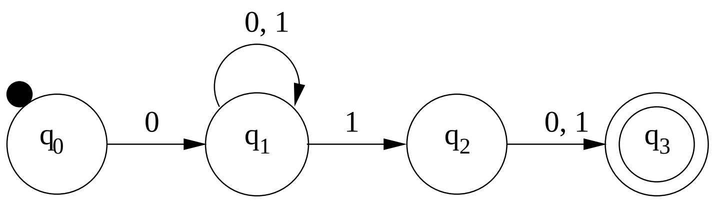
b) Entwerfen sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A, der genau die Sprache $L(G)$ akzeptiert.

c) Konstruieren Sie aus A einen deterministischen endlichen Automaten mittels der Potenzmengenkonstruktion.

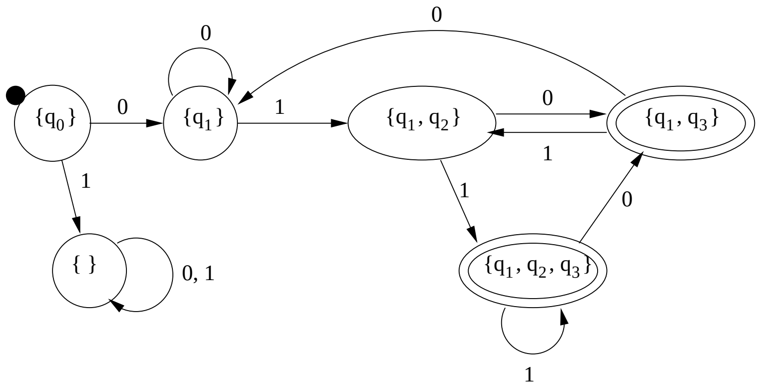
Lösung:

a) In L(G) liegt jedes Wort, das mit einer 0 beginnt und eine 1 an vorletzter Stelle hat, also z.B. 010, 00111 oder 01101010.

b) Der NEA



c) Der DEA



AUFGABE 86 :
Betrachten Sie die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{'\mathbf{1}','\mathbf{2}','\mathbf{\{}','\mathbf{\}}','\mathbf{,}'\}$ (die Hochkommata sind nur zur Abgrenzung da, sie sind nicht Bestandteil der Terminale), dem Startsymbol $S =$ Menge und den folgenden Produktionen

$$\begin{array}{rcll}
\text{Menge} & \rightarrow & \mathbf{\{}\ \text{Elemente0}\ \mathbf{\}} & (1)\\
\text{Elemente0} & \rightarrow & \text{Elemente} & (2)\\
\text{Elemente0} & \rightarrow & \epsilon & (3)\\
\text{Elemente} & \rightarrow & \text{Element}\ \mathbf{,}\ \text{Elemente} & (4)\\
\text{Elemente} & \rightarrow & \text{Element} & (5)\\
\text{Element} & \rightarrow & \mathbf{1} & (6)\\
\text{Element} & \rightarrow & \mathbf{2} & (7)\\
\text{Element} & \rightarrow & \text{Menge} & (8)
\end{array}$$

Geben Sie für die folgenden Wörter aus $L(G)$ einen Ableitungsbaum an.

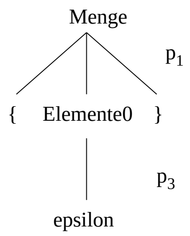
a) $\{\}$

b) $\{1\}$

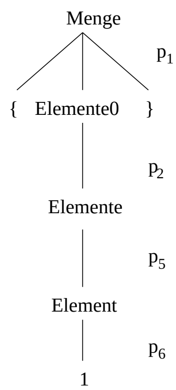
c) $\{\{1\}, 2\}$

Lösung:

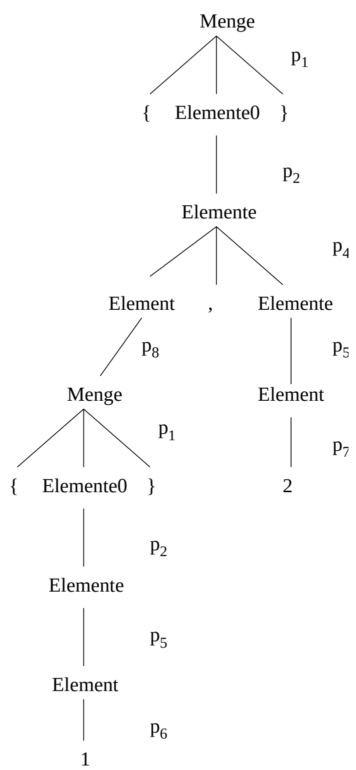
a) { }



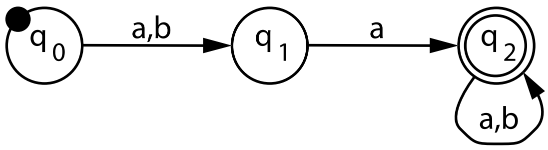
b) { 1 }



c) { { 1 }, 2 }



AUFGABE 87 :
Betrachten Sie den folgenden deterministischen endlichen Automaten A mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Geben Sie den regulären Ausdruck zu der von A akzeptierten Sprache $L(A)$ an.

b) Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten A', der alle Worte akzeptiert, die **nicht** zu $L(A)$ gehören.

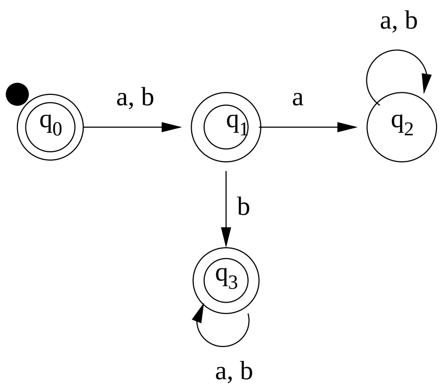
c) Geben Sie eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ an, die die Sprache $L(A)$ erzeugt.

d) Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S')$ an, die die Sprache $L(A')$ erzeugt.

Lösung:

a) $(a|b)a(a|b)^*$

b) Der DEA A'



c) $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} Q_0 &\rightarrow aQ_1|bQ_1 \\ Q_1 &\rightarrow aQ_2 \\ Q_2 &\rightarrow aQ_2|bQ_2|\epsilon \end{aligned}$$

d) $V' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$, $\Sigma' = \{a, b\}$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} Q_0 &\rightarrow aQ_1|bQ_1|\epsilon \\ Q_1 &\rightarrow aQ_2|bQ_3|\epsilon \\ Q_2 &\rightarrow aQ_2|bQ_2 \\ Q_3 &\rightarrow aQ_3|bQ_3|\epsilon \end{aligned}$$