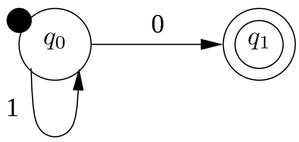
Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 9. Januar 2004
Abgabe 19. Januar 2004

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 11 Musterlösungen

AUFGABE 70 :
Es sei der folgende partielle deterministische endliche Automat (DEA) A zum Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ gegeben:



a) Geben Sie die von A akzeptierte Sprache $L(A)$ formal in Mengenschreibweise an.

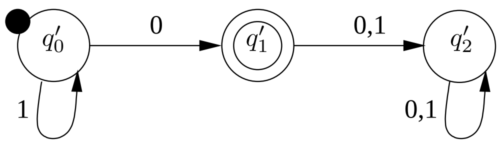
b) Erweitern Sie A zu einem **vollständigen** deterministischen endlichen Automaten A'. Beschreiben Sie A' formal durch die Angaben $A' = (\Sigma', Q', \delta', q'_0, F')$. Zeichnen Sie den Graphen zur Übergangsfunktion δ' von A'.

Lösung:

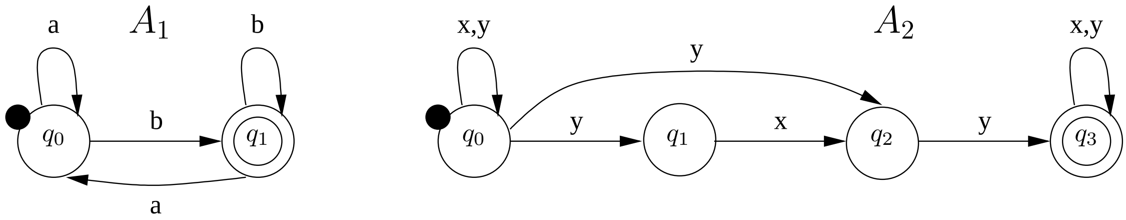
a) Die vom Automaten akzeptierte Sprache ist $L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = x0 \text{ mit } x \in 1^*\}$.

b) Um den DEA A zu vervollständigen, erweitern wir die Zustandsmenge um einen weiteren Zustand q'_2. Auf diese Weise können wir einen Automaten angeben, bei dem für jede Kombination aus Zustand und Eingabesymbol durch die Übergangsfunktion genau ein Folgezustand definiert ist. In diesen gelangt man, wenn nach einer Eingabe der Form 1^*0 noch ein weiteres Symbol eingegeben wird. A' ist ein vollständiger deterministischer endlicher Automat $A' = (\Sigma', Q', \delta', q'_0, F')$ mit $\Sigma' = \{0, 1\}$, $Q' = \{q'_0, q'_1, q'_2\}$, $F = \{q'_1\}$ und der durch die folgende Tabelle gegebenen Übergangsfunktion δ:

δ'	0	1
q'_0	q'_1	q'_0
q'_1	q'_2	q'_2
q'_2	q'_2	q'_2



AUFGABE 71 :
Betrachten Sie die beiden Automaten mit $\Sigma_{A_1} = \{a, b\}$ und $\Sigma_{A_2} = \{x, y\}$:



a) Ist A_1 ein deterministischer Automat? Ist A_2 ein deterministischer Automat? Was ist der Grund dafür?

b) Beschreiben Sie die von A_1 und A_2 akzeptierten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ jeweils formal in Mengenschreibweise.

c) Beschreiben Sie die akzeptierten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ jeweils durch einen regulären Ausdruck.

Lösung:

a) Zu beachten ist hier, dass es bei einem deterministischen Automaten aus jedem Zustand für jedes Eingabesymbol nur maximal einen Zustandsübergang gibt. Bei einem nichtdeterministischen Automaten kann es hingegen eine Wahlfreiheit geben. Aus einem Zustand können für ein Eingabesymbol mehrere Kanten verlaufen. Ein Wort über dem Eingabealphabet wird bei einem solchen nichtdeterministischen Automaten akzeptiert, falls man sich bei Verfolgung mindestens einer der zum Eingabewort gehörigen Alternativen beim Erreichen des Wortendes in einem akzeptierenden Zustand befindet.

   A_1 ist ein deterministischer Automat. Aus jedem Zustand gibt es genau einen Übergang für jedes Symbol aus Σ_{A_1}. A_2 ist kein deterministischer Automat. Denn es gibt aus dem Zustand q_0 mehr als einen Übergang (drei Übergänge) bei Eingabe y.

b) Immer wenn als letztes Symbol ein a gelesen wurde, befindet sich A_1 im nicht akzeptierenden Zustand q_0. Wenn jedoch als letztes Symbol ein b gelesen wurde, befindet sich A_1 im akzeptierenden Zustand q_1. Daher ist $L(A_1) = \{w \in \{a,b\}^+ \mid w \text{ endet mit } b\}$ die vom Automaten akzeptierte Sprache.

   Für beliebige Folgen aus $\{x,y\}^*$ kann A_2 in den Zuständen q_0 oder q_3 verbleiben. Vom Zustand q_0 kann der Automat nur in den Zustand q_3 kommen, wenn entweder yy oder yxy gelesen wird. Daher akzeptiert der Automat Eingaben der Form $(x|y)^*yy(x|y)^*$ und solche der Form $(x|y)^*yxy(x|y)^*$. Somit ist $L(A_2) = \{w \in \{x,y\}^* \mid w = abc \text{ mit } a,c \in \{x,y\}^* \text{ und } b \in \{yy, yxy\}\}$ die akzeptierte Sprache.

c) Regulärer Ausdruck zu $L(A_1)$: $(a|b)^*\,b$.
   Regulärer Ausdruck zu $L(A_2)$: $(x|y)^*\,(\,yy\,|\,yxy\,)\,(x|y)^*$.
   Diese regulären Ausdrücke sollten mit den Erklärungen aus b) klar sein.

AUFGABE 72 :
Sei A ein deterministischer endlicher Automat (DEA), der genau jene Wörter $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a,b,c\}$ akzeptiert, bei denen die einzelnen Zeichen $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma$ in aufsteigender Reihenfolge bezüglich der normalen Ordnung des Alphabets ($a < b$, $b < c$, $a < c$) auftreten.

So gehört zum Beispiel das Wort `acc` zu der von A akzeptierten Sprache $L(A)$, das Wort `cab` hingegen nicht.

Beschreiben Sie A entweder durch einen Übergangsgraphen zu δ oder formal durch die Angaben $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit Eingabealphabet Σ, Zustandsmenge Q, Übergangsfunktion δ, Startzustand q_0 und Menge der akzeptierenden Zustände F.)

Lösung:

Für die Konstruktion ist es hilfreich, sich in die Lage des DEA A zu versetzen. Dieser muss, um die Einhaltung der alphabetischen Reihenfolge zu überprüfen, in jedem Schritt das aktuelle Zeichen w_i mit dem vorherigen Zeichen w_{i-1} vergleichen. Das heißt der DEA benötigt einen Speicher für das letzte Zeichen w_{i-1} und damit 3 akzeptierende Zustände q_0, q_1, q_2, welche jeweils das zuletzt eingelesene und damit das bisher größte gelesene Zeichen (wenn die Reihenfolge bis dahin eingehalten wurde) repräsentieren.

Es wird ferner ein nicht akzeptierender Zustand q_3 eingeführt, welcher bei einer Verletzung der Reihenfolgeregel erreicht wird. Dieser Zustand ist zugleich auch Endzustand, da er nicht mehr verlassen werden kann.

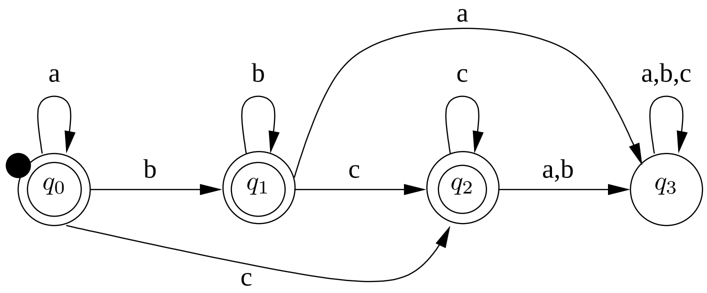
Der DEA wird nun so konstruiert, dass er sich, wenn die alphabetische Reihenfolge bis dahin eingehalten wurde, im Zustand q_i befindet, wobei i für die Position des zuletzt eingelesenen Zeichens im Alphabet steht (q_0 für a, q_1 für b, q_2 für c). Sobald die alphabetische Reihenfolge nicht eingehalten wird, gelangt man von jedem Zustand aus in den nicht akzeptierenden Zustand q_3. Als Startzustand wird der das Zeichen a repräsentierende Zustand q_0 gewählt.

Der deterministische endliche Automat $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ kann formal wie folgt definiert werden:

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist das Eingabealphabet
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ist die Menge aller Zustände
- Die Übergangsfunktion δ ist gegeben durch die folgende Tabelle:

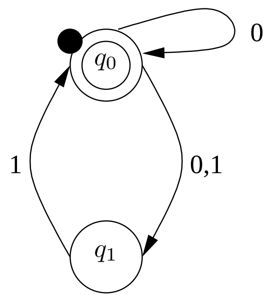
δ	a	b	c
q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_1	q_2
q_2	q_3	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3	q_3

- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand
- $F = \{q_0, q_1, q_2\} \subseteq Q$ ist die Menge der akzeptierenden Zustände.



AUFGABE 73 :

Betrachten Sie den Automaten rechts zum Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.



a) Beschreiben Sie den Automaten A formal durch die Angaben $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

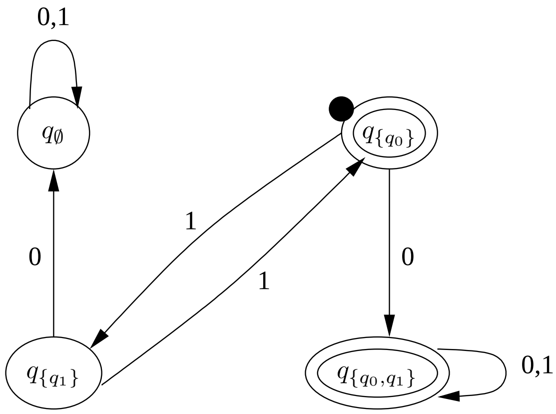
b) Konstruieren Sie mit der in der Vorlesung besprochenen Methode zu dem Automaten A einen deterministischen Automaten.

Lösung:

a) A ist ein nichtdeterministischer Automat, der alle mit einer geraden Anzahl von 1en beginnenden Wörter akzeptiert. Er lässt sich beschreiben durch $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1\}$, akzeptierende Zustände $F = \{q_0\}$ und der Übergangsfunktion δ gemäss dieser Tabelle:

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$

b) Mit der Potenzmengenkonstruktion ergibt sich der deterministische Automat mit dieser Übergangsfunktion:



Da der Ursprungsautomat keine ϵ-Bewegungen hat und q_0 Startzustand ist, ist $q_{\{q_0\}}$ Startzustand des DEA. Der einzige akzeptierende Zustand des Ursprungsautomaten ist q_0. Daher sind $q_{\{q_0\}}$ (wegen $q_0 \in \{q_0\}$) und $q_{\{q_0,q_1\}}$ (wegen $q_0 \in \{q_0, q_1\}$) akzeptierende Zustände des DEA.

AUFGABE 74 :

Sei $L := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{das zweitletzte Symbol von } w \text{ ist eine } 0\}$.

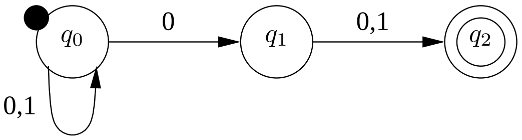
a) Geben Sie zu L einen **nichtdeterministischen** endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ an. Beschreiben Sie den Automaten A sowohl durch einen Übergangsgraphen als auch formal als 5-Tupel.

b) Geben Sie zu L einen **deterministischen** endlichen Automaten A' mit $L(A') = L$ an. Beschreiben Sie den Automaten A' sowohl durch einen Übergangsgraphen als auch formal als 5-Tupel.

Lösung:

a) Der nichtdeterministische Automat A lässt sich beschreiben durch $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\} \subseteq Q$ und der durch die folgende Tabelle gegebenen Übergangsfunktion δ:

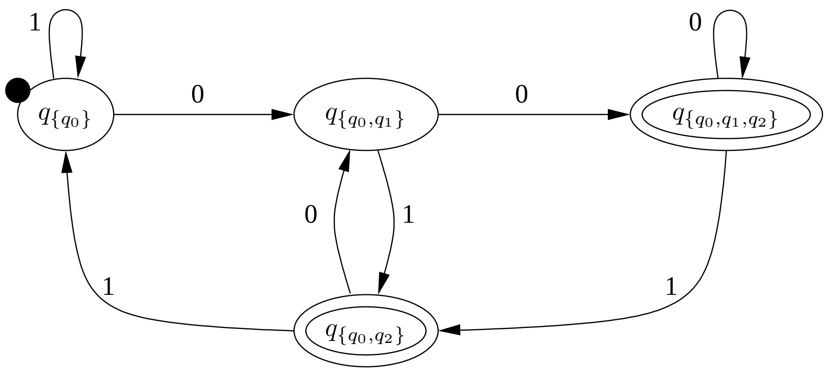
δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$



Da q_2 der einzige akzeptierende Zustand des Automaten ist, kann ein Wort nur akzeptiert werden, wenn sich der Automat nach dem Lesen der kompletten Eingabe in diesem Zustand befindet. Dies ist nur möglich, falls bei Eingabe $w = w_1...w_n$, $w \in \Sigma^*$, der Automat beim Lesen von w_{n-1} vom Zustand q_0 in den Zustand q_1 wechselt (nur beim Lesen einer 0 möglich!) und beim Lesen des nächsten Symbols w_n vom Zustand q_1 in den Zustand q_2. Damit akzeptiert der Automat genau die Worte w, für die $w_{n-1} = 0$ und $n \geq 2$ gilt.

b) Da wir schon einen nichtdeterministischen Automaten A zu der Sprache L vorliegen haben, können wir einen deterministischen Automaten A' zu L über die Potenzmengenkonstruktion erhalten. Man erhält den Automaten A' beschrieben durch $A' = (\Sigma', Q', \delta', q_{\{q_0\}}, F')$ mit $\Sigma' = \{0, 1\}$, $Q' = \{q_{\{q_0\}}, q_{\{q_0,q_1\}}, q_{\{q_0,q_2\}}, q_{\{q_0,q_1,q_2\}}\}$, $F' = \{q_{\{q_0,q_2\}}, q_{\{q_0,q_1,q_2\}}\}$ und der durch die folgende Tabelle gegebenen Übergangsfunktion δ':

δ'	0	1
$q_{\{q_0\}}$	$q_{\{q_0,q_1\}}$	$q_{\{q_0\}}$
$q_{\{q_0,q_1\}}$	$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_2\}}$
$q_{\{q_0,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_1\}}$	$q_{\{q_0\}}$
$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_2\}}$



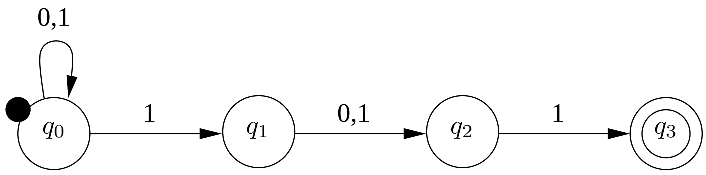
AUFGABE 75 :

a) Entwerfen Sie einen **nichtdeterministischen** endlichen Automaten (NEA) zu der von dem regulären Ausdruck $(0|1)^*1(0|1)1$ erzeugten Sprache.

b) Entwerfen Sie einen **deterministischen** endlichen Automaten (DEA) zu der von dem regulären Ausdruck $1 \mid (0^+1^*)$ erzeugten Sprache.

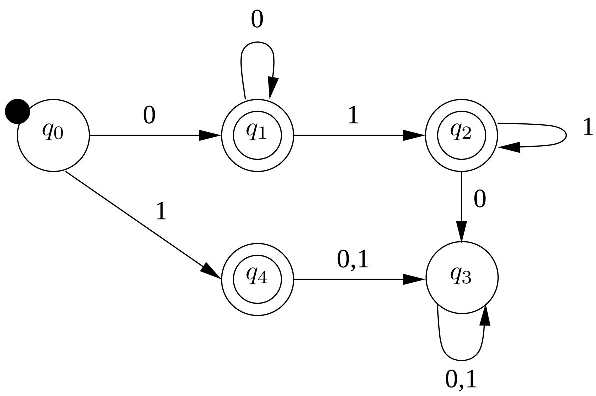
Lösung:

a) Der Übergangsgraph eines nichtdeterministischen endlichen Automaten zu dem regulären Ausdruck $(0|1)^*1(0|1)1$:



Der Automat kann in q_0 durch ein Wort aus $\{0,1\}^*$ iterieren, mit 1 in q_1 übergehen, mit 0 oder 1 in q_2 übergehen und schließlich mit 1 in den akzeptierenden Zustand q_3 wechseln. Eingaben anderer Art werden nicht akzeptiert.

b) Der Übergangsgraph eines deterministischen endlichen Automaten zu dem regulären Ausdruck $1 \mid (0^+1^*)$:



Dass der Automat das Wort 1 im Zustand q_4 akzeptiert, ist offensichtlich. Im Zustand q_1 werden Eingaben der Form 0^+ akzeptiert, im Zustand q_2 solche der Form 0^+1^+. Sobald der Automat das erste Zeichen liest, an dem zu erkennen ist, dass die Eingabe weder von der Form 1 noch von der Form 0^+1^* ist, wird in den nicht akzeptierenden Zustand q_3 gewechselt. Dort verbleibt der Automat bis zum Ende der Eingabe.

AUFGABE 76 :
Geben Sie reguläre Ausdrücke zu den folgenden Sprachen an:

a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ endet mit 110}\}$

b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ beginnt und endet mit demselben Symbol}\}$

c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ beginnt mit einer 1 und enthält keine zwei aufeinander folgenden 0}\}$

Lösung:

a) Ein passender regulärer Ausdruck ist $(0|1)^*110$.

b) Ein passender regulärer Ausdruck ist $0 \mid 1 \mid (1(0|1)^*1) \mid (0(0|1)^*0)$.

c) Ein passender regulärer Ausdruck ist $(1|10)^+$.

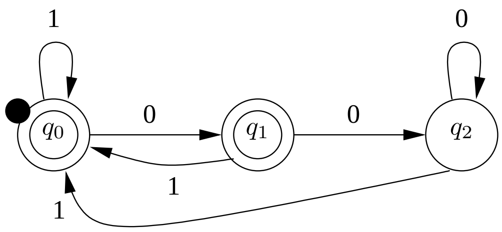
AUFGABE 77 :
Entwerfen Sie **deterministische** endliche Automaten für die folgenden Sprachen:

a) Die Menge aller Zeichenketten, die nicht mit 00 enden.

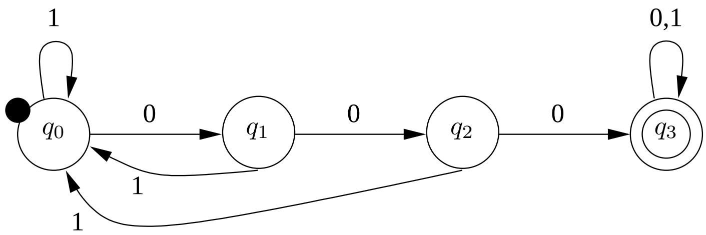
b) Die Menge aller Zeichenketten, in denen drei aufeinander folgende 0en auftreten.

Lösung:

a) Eine mögliche Realisierung beruht auf folgender nur bei **vollständigen deterministischen** Automaten verwendbaren Idee: Wir bauen einen deterministischen Automaten, der alle Wörter akzeptiert, die auf 00 enden. Dann machen wir genau die Zustände zu akzeptierenden Zuständen, die es beim diesem Automaten nicht waren. Es ergibt sich der Automat mit diesem Übergangsgraphen:



b) Übergangsgraph eines Automaten zu der Sprache:



Es ist leicht einzusehen, dass der Automat nur genau dann in den einzigen akzeptierenden Zustand q_3 wechselt, wenn der Automat drei aufeinander folgende 0en gelesen hat.

KORREKTURAUFGABE 78 :
Sei $A = (\{0,1\}, \{q_0.q_1, q_2, q_3, q_4\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA). Die Übergangsfunktion δ sei durch diese Tabelle definiert:

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zu A (die graphische Darstellung der Funktion δ).

b) Beschreiben Sie die von A akzeptierte Sprache $L(A)$ formal in Mengenschreibweise.

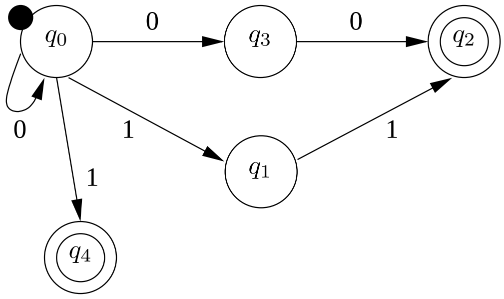
c) Geben Sie einen regulären Ausdruck zur akzeptierten Sprache $L(A)$ an.

d) Warum ist A kein deterministischer Automat?

e) Konstruieren Sie den zu A gehörigen deterministischen endlichen Automaten (DEA) A' gemäß der in der Vorlesung vorgestellten Potenzmengenkonstruktion.

Lösung:

a) Der Graph zur Übergangsfunktion δ von A:



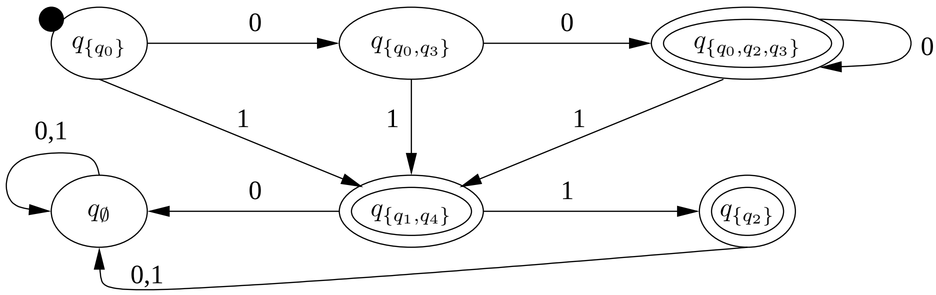
b) Von A werden alle Eingaben der Form $0^*(1|00|11)$ akzeptiert. Im Zustand q_0 kann der Automat durch keine oder mehr 0en iterieren. Dann kann der Automat mit 1 aus dem Zustand q_0 in den akzeptierenden Zustand q_4 wechseln oder mit 00 bzw. 11 via q_3 bzw. via q_1 in den anderen akzeptierenden Zustand q_2 wechseln.

Daher ist die von A akzeptierte Sprache:
$L(A) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uv$ mit $u \in 0^*$ und $v \in \{1, 00, 11\} \}$

c) Der reguläre Ausdruck zu $L(A)$ sollte mit den Erklärungen aus b) klar sein:
$0^*(1|00|11)$

d) A ist kein deterministischer Automat, da es aus q_0 bei Eingabe 0 und 1 jeweils mehr als einen Zustandsübergang gibt.

e) Über die Potenzmengenkonstruktion erhalten wir den Graph zur Übergangsfunktion δ' des deterministischen Automaten A' mit $L(A') = L(A)$:



Bei der Konstruktion des Automaten braucht man einen Zustand $q_\emptyset$, da es aus den Zuständen q_2 und q_4 keine Zustandsübergänge gibt. Akzeptierende Zustände sind $q_{\{q_0,q_2,q_3\}}$ (wegen $q_2 \in \{q_0, q_2, q_3\}$), $q_{\{q_1,q_4\}}$ (wegen $q_4 \in \{q_1, q_4\}$) und $q_{\{q_2\}}$ (wegen $q_2 \in \{q_2\}$).

Gut geeignet zum Aufarbeiten eventueller Wissenslücken im Bereich der endlichen Automaten ist übrigens das Skript zur Vorlesung „Berechenbarkeit & formale Sprachen“ von Professor Blömer. Er hat es auf den Webseiten zu seiner Vorlesung unter der URL http://webserv.upb.de/cs/ag-bloemer/lehre/bfs_WS2002/ zur Verfügung gestellt. Es gibt dort je einen Skriptteil zu deterministischen und nichtdeterministischen Automaten.