Dr. Theo Lettmann

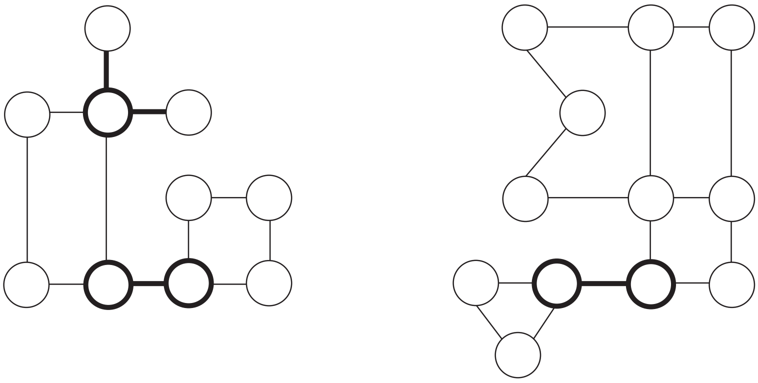
Paderborn, den 05. Januar 2004
Abgabe 12. Januar 2004

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004

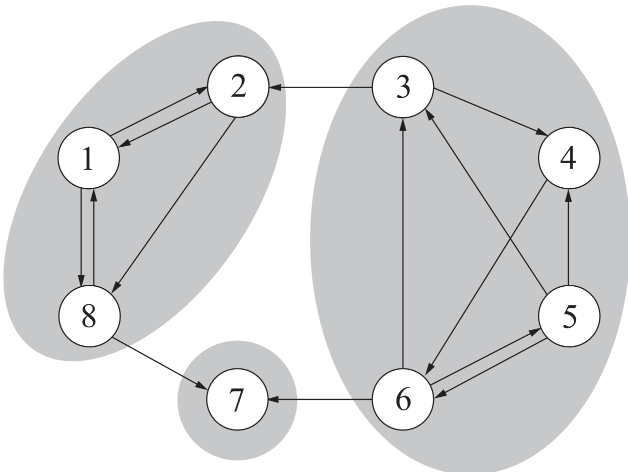
Blatt 10 Musterlösungen

LÖSUNG 63 :

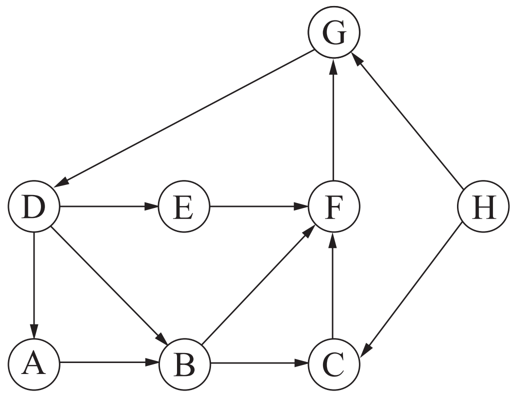
1. Alle Schnittknoten und Schnittkanten sind fett hervorgehoben.



2. Der Graph G besteht aus insgesamt drei starken Zusammenhangskomponenten (in der Abbildung grau hinterlegt). Die erste Zusammenhangskomponente ist der aus der Knotenmenge $\{1, 2, 8\}$ induzierte Teilgraph, Die zweite Zusammenhangskomponente ist der aus der Knotenmenge $\{3, 4, 5, 6\}$ induzierte Teilgraph. Die dritte Zusammenhangskomponente besteht nur aus dem Knoten 7.

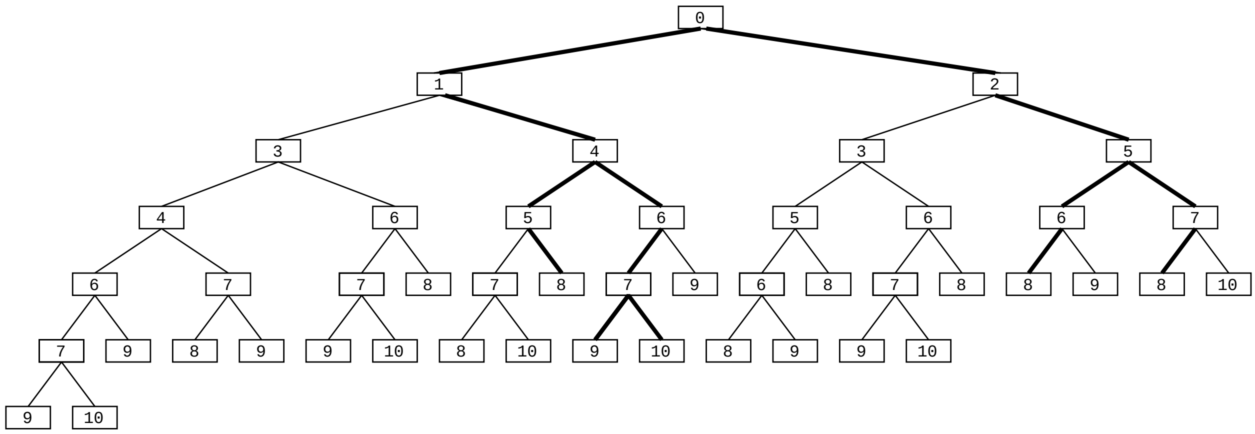


3. Die Abbildung auf der folgenden Seite zeigt einen aus dem Ursprungsgraphen abgeleiteten gerichteten Graph mit genau zwei starken Zusammenhangskomponenten. Die erste Zusammenhangskomponente ist der aus der Knotenmenge $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ induzierte Teilgraph. Die zweite Zusammenhangskomponente besteht nur aus dem Knoten H.



LÖSUNG 64 :

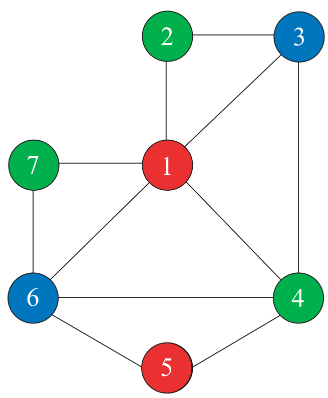
1. Der binäre Spielbaum zum Spiel **Acht**.



2. Bei optimalem Spiel gewinnt B (Gewinnstrategie mit fett gedruckten Kanten).

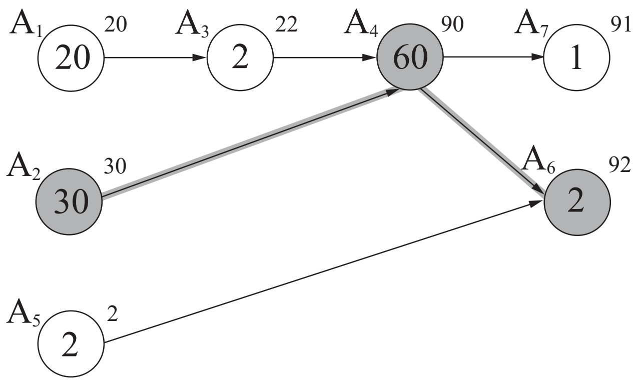
LÖSUNG 65 :
Das Problem lässt sich als Färbungsproblem modellieren. Die Ausschlussbedingungen zwischen den Klausurterminen lassen sich als sogenannter Konfliktgraph interpretieren: Jeder Knoten entspricht einer Klausur, und zwei Knoten sind durch Kanten verbunden, falls die Klausuren nicht am selben Tag stattfinden dürfen. Die minimale Anzahl von Tagen zur Durchführung aller Klausuren entspricht einer Färbung des Graphen mit minimaler Farbenzahl. Zur Färbung des Graphen sind minimal drei Farben notwendig. Eine mögliche Terminplanung könnte wie folgt aussehen (vgl. Beispielfärbung):

1. Tag: Klausuren zu den Vorlesungen 1 und 5
2. Tag: Klausuren zu den Vorlesungen 2, 4 und 7
3. Tag: Klausuren zu den Vorlesungen 3 und 6



LÖSUNG 66 :

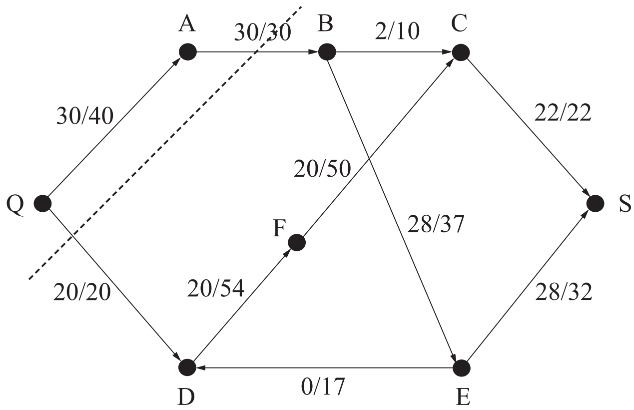
a) Die Abhängigkeiten zwischen den Aktionen können duch folgenden Abhängigkeitsgraphen dargestellt werden. Die Kanten im Graphen modellieren die *notwendige(n)* Vorbedingung(en).



b) Der kritische Pfad ist (A_2, A_4, A_6) (in der Abbildung fett hervorgehoben).

LÖSUNG 67 :

Die Aufgabenstellung beschreibt ein typisches Flussproblem. Die Aufgabe besteht darin, den Kanten konkrete Flusswerte f_i zuzuordnen, die die Kantenkapazitäten c_i nicht überschreiten, so dass der Gesamtfluss von der Quelle bis zur Senke maximiert wird. Nach dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem entspricht der Wert des maximalen Flusses f_{max} dem Wert eines minimalen Schnittes c_{min}. Die gestrichelte Linie stellt einen minimalen Schnitt durch das Netzwerk dar mit $c_{min} = f_{max} = 50$. In der Abbildung sind ferner den Kanten konkrete Flusswerte f_i zugeordnet (Notation: f_i/c_i), so dass der Gesamtfluss maximal wird.



LÖSUNG 68 :
Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten entweder 0 oder 2 Söhne hat. Weiter sei $r \in V$ die Wurzel des Baumes. Es sei b die Anzahl der Blätter und $n = |V|$ die Anzahl der Knoten. Dann gilt:

$$n = 2b - 1$$

Beweis durch Induktion über die Tiefe t eines Baumes mit Wurzel r:
I.A.: Sei $t = 0$. Dann besteht G nur aus einem Knoten, der gleichzeitig Wurzel und Blatt ist. Damit ist $1 = n = 2b - 1 = 1$.
I.V.: Die Behauptung gelte für alle Bäume mit Wurzel r und Tiefe $t' < t$.
I.S.: Es sei $G = (V, E)$ ein Baum der Tiefe $t > 0$ mit Wurzel r und Knotenanzahl $|V| = n$. Dann hat r zwei Söhne r_1 und r_2, die ihrerseits wieder Wurzeln von Teilbäumen G_1 und G_2 sind. Für die Tiefe t_i von G_i gilt $t_i < t$ für $i = 1, 2$. Es seien b_i, n_i die Anzahlen der Blätter bzw. der Knoten von G_i für $i = 1, 2$. Dann ist $n = n_1 + n_2 + 1$.
Nach I.V. ist $n_i = 2b_i - 1$ für $i = 1, 2$, also gilt für die Anzahl n der Knoten von G:

$$n = n_1 + n_2 + 1 = 2b_1 - 1 + 2b_2 - 1 + 1 = 2(b_1 + b_2) - 1$$

LÖSUNG 69 :
Das Problem lässt sich als Graphfärbungsproblem modellieren. Im zugehörigen Graphen bilden die Tierarten die Knoten und die Unverträglichkeiten zwischen den Tierarten sind als Kanten abgebildet. Es ist die Frage zu beantworten, ob dieser Graph 3-färbbar ist (entsprechend der auf 3 beschränkten Anzahl von Ställen). Der von den Knoten $\{Pi, Ti, Bi, Ei\}$ induzierte Teilgraph stellt einen vollständigen Graphen mit 4 Knoten dar, zu dessen Färbung mindestens 4 Farben notwendig sind. Eine Aufteilung auf drei Ställe, die sämtliche Unverträglichkeiten berücksichtigt, ist demnach nicht möglich. Ein „Überleben“ der Einhörner kann nur gesichert werden, indem man sie zusammen mit den Bibern unterbringt (siehe Beispielfärbung). Dann allerdings büßen die Einhörner im Laufe der Reise ihr Horn ein und sind damit keine Einhörner mehr, sondern nur noch Pferde.