Dr. Theodor Lettmann

Paderborn, den 12. Dezember 2003
Abgabe 5. Januar 2004

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 9

AUFGABE 56 :
Gegeben ist das folgende Programmstück:

```
Eingabe: a ∈ ℕ0
x := a;
y := 0;
Solange (x > 0) wiederhole
   y := y + 1;
   y := y + 1;
   x := x - 1;
Ausgabe: y
```

a) Bestimmen Sie zunächst, welche Funktion mit dem Programmstück berechnet wird.

b) Welche Kombination der folgenden sechs Teilaussagen eignet sich als Invariante für die obige Schleife?

i)	$x \leq 0$	iv)	$2 * (y + 1) = 2 * a$
ii)	$x \geq 0$	v)	$x + 2 * y = 2 * a$
iii)	$x = 0$	vi)	$2 * x + y = 2 * a$

c) Verifizieren Sie das Programmstück mit der von Ihnen bestimmten Invarianten. Geben Sie dabei einzelne Zwischenschritte an.

Lösung:

a) Das Programmstück berechnet die Funktion $y = f(a) = 2 \cdot a$.

b) Die Kombination der beiden Teilaussagen

   ii) $x \geq 0$ und vi) $2 * x + y = 2 * a$

   eignet sich als Invariante der angegebenen Schleife.

c) Verifikation mit der unter b) bestimmten Invarianten:

Eingabe: a $\in \mathbb{N}_0$

$\{a \geq 0 \text{ und } a = a\}$
`x := a;`
$\{x \geq 0 \text{ und } x = a\}$
$\rightarrow \{x \geq 0 \text{ und } x = a \text{ und } 0 = 0\}$
`y := 0;`
$\{x \geq 0 \text{ und } x = a \text{ und } y = 0\}$
$\rightarrow \{x \geq 0 \text{ und } 2 * x = 2 * a \text{ und } y = 0\}$
$\rightarrow \{x \geq 0 \text{ und } 2 * x + 0 = 2 * a \text{ und } y = 0\}$
$\rightarrow \{x \geq 0 \text{ und } 2 * x + y = 2 * a \text{ und } y = 0\}$
$\rightarrow \{x \geq 0 \text{ und } 2 * x + y = 2 * a\} = INV$
`Solange (x > 0) wiederhole`
$\{x \geq 0 \text{ und } 2 * x + y = 2 * a \text{ und } x > 0\}$
$\rightarrow \{2 * x + y = 2 * a \text{ und } x > 0\}$
$\rightarrow \{2 * x + y = 2 * a \text{ und } x \geq 1\}$
$\rightarrow \{2 * x + y = 2 * a \text{ und } x - 1 \geq 0\}$
$\rightarrow \{2 * x - 2 + 2 + y = 2 * a \text{ und } x - 1 \geq 0\}$
$\rightarrow \{2 * (x - 1) + y + 1 + 1 = 2 * a \text{ und } x - 1 \geq 0\}$
`y := y + 1;`
$\{2 * (x - 1) + y + 1 = 2 * a \text{ und } x - 1 \geq 0\}$
`y := y + 1;`
$\{2 * (x - 1) + y = 2 * a \text{ und } x - 1 \geq 0\}$
`x := x - 1;`
$\{2 * x + y = 2 * a \text{ und } x \geq 0\} = INV$
$\{2 * x + y = 2 * a \text{ und } x \geq 0 \text{ und } x \leq 0\}$
$\rightarrow \{y = 2 * a\}$

Ausgabe: y

Die Schleife terminiert, da der Ausdruck $T = x$, beginnend mit $T = a$, in jedem Schleifendurchlauf um 1 erniedrigt wird, und x durch 0 nach unten beschränkt ist.

AUFGABE 57 :
Folgende Schleife terminiert nicht immer. Verschärfen Sie die Vorbedingung P zu einer Aussage R und zeigen Sie, dass $\{R \text{ und } B\}$ invariant ist. (Die verschärfte Vorbedingung repräsentiert eine speziellere Wertebelegung für x und y.)

$\{y > x \text{ und } x \geq 0\} \;=\; P$
```
Solange y > x wiederhole
      x := x * x + 5 * x;
```

Lösung:
Als Verschärfung der Vorbedingung P wird die Aussage $R = \{y > x \text{ und } x = 0\}$ gewählt. Damit ergibt sich dann:

$R = \{y > x \text{ und } x = 0\}$	Konsequenzregel
$\rightarrow \{y > x \text{ und } x = 0 \text{ und } y > x\}$	
$= \{R \text{ und } B\}$	
`Solange y > x wiederhole`	
$\{R \text{ und } B\}$	
$= \{x = 0 \text{ und } y > x\}$	Konsequenzregel
$\rightarrow \{x = 0 \text{ und } x < y\}$	Konsequenzregel
$\rightarrow \{x * x = 0 \text{ und } x * x < y\}$	Konsequenzregel
$\rightarrow \{x * x + 5 * x = 0 \text{ und } x * x + 5 * x < y\}$	
`x := x * x + 5 * x;`	Zuweisungsregel
$\{x = 0 \text{ und } x < y\}$	
$\rightarrow \{R \text{ und } B\}$	

Also terminiert die Schleife nicht immer, und zwar dann, wenn x zu Beginn des angegebenen Programmstückes den Wert 0 hat.

KORREKTURAUFGABE 58 (10 Punkte) **:**
Gegeben ist das folgende Programmstück:

```
Eingabe: a,b∈ ℕ0 mit b>0
x := 0;
r := a;
Solange (r ≥ b) wiederhole
   r := r - b;
   x := x + 1;
Ausgabe: x,r
```

a) Bestimmen Sie zunächst, welche Funktion mit dem Programmstück berechnet wird.

b) Welche Kombination der folgenden sechs Teilaussagen eignet sich als Invariante für die obige Schleife?

i)	$r \leq 0$	iv)	$b = r \cdot x$
ii)	$r \geq 0$	v)	$a = x \cdot b + r$
iii)	$r = 0$	vi)	$a = x + r$

c) Verifizieren Sie das Programmstück mit der von Ihnen bestimmten Invarianten. Geben Sie dabei einzelne Zwischenschritte an.

Lösung:

a) Das Programmstück führt eine ganzzahlige Division mit Rest von a durch b aus, so dass $a = x \cdot b + r$ gilt.

b) Die Kombination der beiden Teilaussagen

ii) $x \geq 0$ und v) $a = x \cdot b + r$

eignet sich als Invariante der angegebenen Schleife.

c) Verifikation mit der unter b) bestimmten Invarianten:

Eingabe: a,b $\in \mathbb{N}_0$ mit b>0

$\{a \geq 0$ und $b > 0\}$
$\rightarrow \{a \geq 0$ und $b > 0$ und $0 = 0\}$
```
x := 0;
```
$\{a \geq 0$ und $b > 0$ und $x = 0\}$
$\rightarrow \{a \geq 0$ und $b > 0$ und $x = 0$ und $a = a\}$
```
r := a;
```
$\{a \geq 0$ und $b > 0$ und $x = 0$ und $r = a\}$
$\rightarrow \{r \geq 0$ und $a = x \cdot b + r\}$ = INV
Solange (r $\geq$ b) wiederhole
  $\{r \geq 0$ und $a = x \cdot b + r$ und $r \geq b\}$
  $\rightarrow \{a = x \cdot b + r$ und $r \geq b\}$
  $\rightarrow \{a - b = x \cdot b + r - b$ und $r - b \geq 0\}$
```
    r := r - b;
```
  $\{a - b = x \cdot b + r$ und $r \geq 0\}$
  $\rightarrow \{a = (x + 1) \cdot b + r$ und $r \geq 0\}$
```
    x := x + 1;
```
  $\{a = x \cdot b + r$ und $r \geq 0\}$ = INV
$\{a = x \cdot b + r$ und $r \geq 0$ and $r < b\}$
$\rightarrow \{a = x \cdot b + r$ und $0 \leq r < b\}$

Ausgabe: x,r

Die Schleife terminiert, da der Ausdruck $T = r$, beginnend mit $T = b$, in jedem Schleifendurchlauf um $b \geq 1$ erniedrigt wird, und r durch 0 nach unten beschränkt ist.

AUFGABE 59 :
Betrachten Sie den in Abbildung 1 gegebenen ungerichtete Graph $G = (V, E)$.

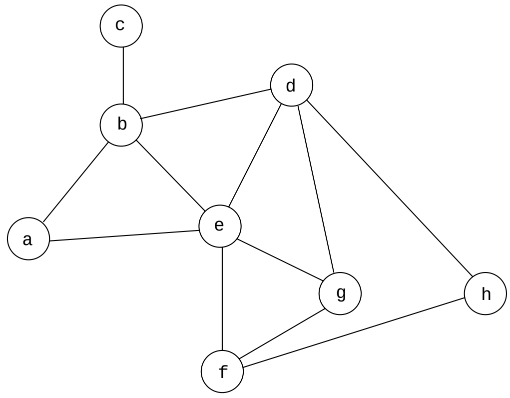


Abbildung 1: Der Graph $G = (V, E)$

1. Stellen Sie G dar als
   (a) Mengen von Knoten und Kanten,
   (b) Adjazenzliste,
   (c) Adjazenzmatrix

   und geben Sie den Grad der Knoten und des Graphen an.

2. Gibt es in dem durch die Menge $I = \{a, b, c, d, e\}$ induzierten Teilgraph einen Euler-Weg? Zeichnen Sie den Teilgraph und begründen Sie ihre Antwort.

3. Gibt es in dem durch die Menge $I = \{a, b, d, e, f, h\}$ induzierten Teilgraph einen Euler-Kreis? Zeichnen Sie den Teilgraph und begründen Sie ihre Antwort.

4. Gibt es in dem durch die Menge $I = \{a, b, d, e, f, g, h\}$ induzierten Teilgraph einen Hamilton-Kreis? Zeichnen Sie den Teilgraph und begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

1. (a) $G = (V, E)$
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{c, b\}, \{b, e\}, \{f, e\}, \{f, g\}, \{b, d\}, \{e, d\}, \{e, g\}, \{f, h\}, \{d, g\}, \{d, h\}\}$

   (b) Adjazenzliste von G:

		Grad
a	b,e	2
b	a,c,d,e	4
c	b	1
d	b,e,g,h	4
e	a,b,d,f,g	5
f	e,g,h	3
g	d,e,f	3
h	d,f	2

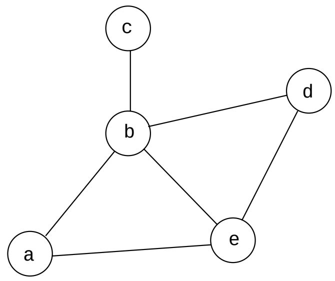
$\Rightarrow \deg(G) = 5$

(c) Adjazenzmatrix von G:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	f	w	f	f	w	f	f	f
b	w	f	w	w	w	f	f	f
c	f	w	f	f	f	f	f	f
d	f	w	f	f	w	f	w	w
e	w	w	f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	f	w	f	w	w
g	f	f	f	w	w	w	f	f
h	f	f	f	w	f	w	f	f

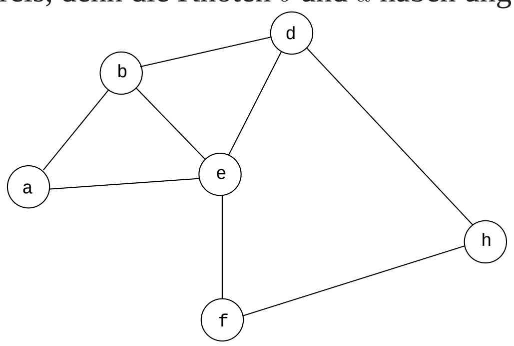
2. G hat Euler-Weg $\Leftrightarrow$ G ist zusammenhängend und hat genau zwei ungerade Knoten.

   Ein möglicher Euler-Weg: (c, b, d, e, b, a, e)

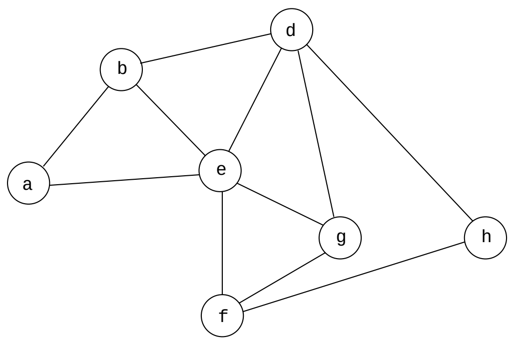


3. G hat Euler-Kreis $\Leftrightarrow$ alle Knoten in G sind gerade.

   Es gibt keinen Euler-Kreis, denn die Knoten b und d haben ungerade Grade.



4. Ein möglicher Hamilton-Kreis: (a, b, d, h, f, g, e, a)



AUFGABE 60 :
Man möchte mehrere Kommunikationsknoten miteinander verbinden, wobei die Kosten für das Kommunikationsnetzwerk minimal sein sollen.

1. Welchem graphentechnischen Problem entspricht das Lösen dieser Aufgabe?

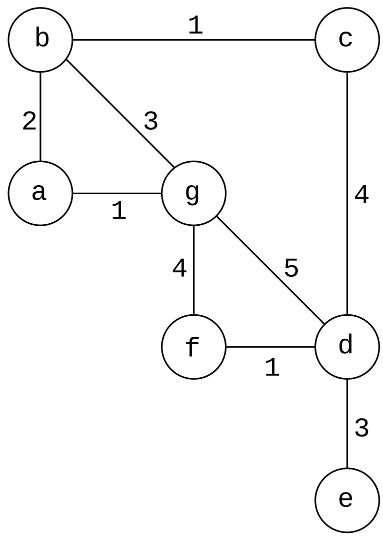
2. Zeichnen Sie, entsprechend der Tabelle, die Kommunikationsknoten und die möglichen Kommunikationsstrecken und finden Sie das kostengünstigste Kommunikationsnetzwerk.

Knoten	Knoten	Kosten
a	b	2
a	g	1
b	c	1
b	g	3
c	d	4
d	e	3
d	f	1
d	g	5
f	g	4

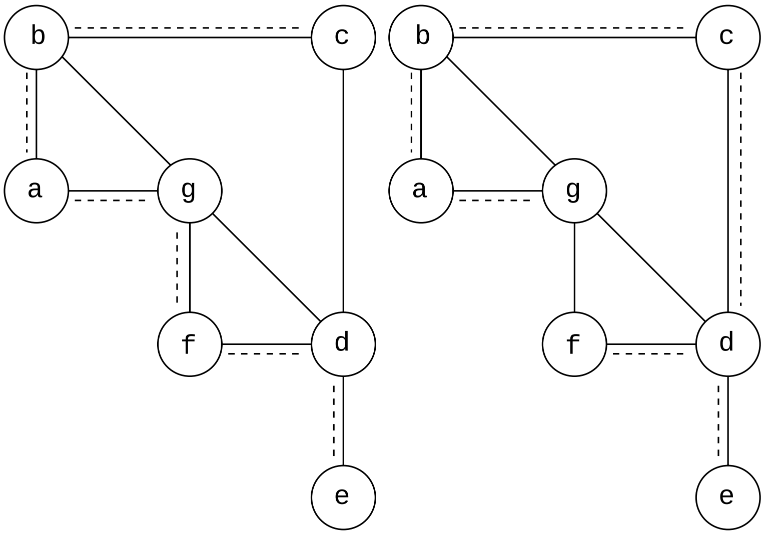
Lösung:

1. Das Lösen der Aufgabenstellung entspricht dem Finden eines minimalen Spannbaums.

2. Der Netzwerkgraph:

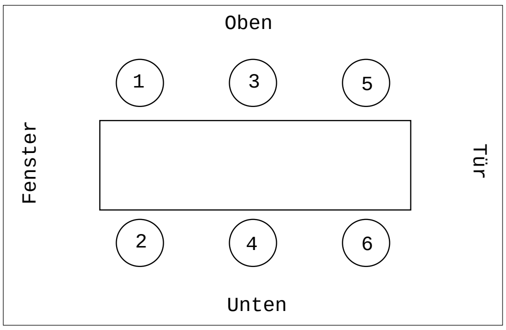


Mögliche Lösungen:



AUFGABE 61 :
Anna und Bernd planen ein Abendessen mit ihren vier Freunden Camilla, David, Erika und Frederik. Anna kennt einige Vorlieben der Freunde, wo diese gerne sitzen.

- Anna möchte links beim Fenster sitzen, David dagegen nicht.
- Bernd möchte mittig sitzen.
- David möchte nicht auf Platz 3 sitzen.
- Camilla und Erika möchten nicht in der Nähe der Tür sitzen.
- Camilla möchte oben, Erika unten sitzen.
- Frederik möchte neben der Tür sitzen.



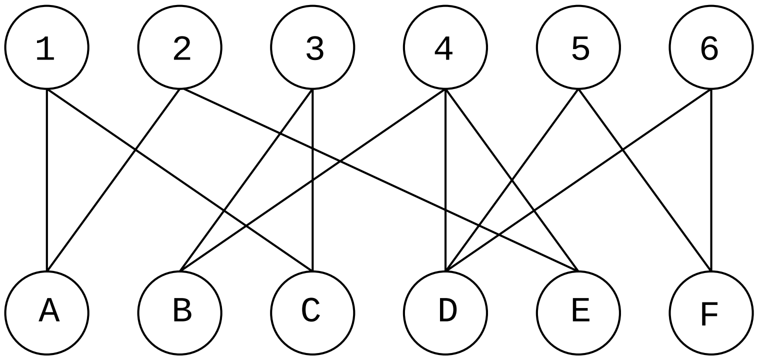
1. Wie heißt dieses Problem?

2. Modellieren Sie das Problem durch einen bipartiten Graph.

3. Findet jeder einen Sitzplatz (Zeichnung)?

Lösung:

1. Das Lösen der Aufgabenstellung entspricht dem Lösen des Matchigproblems.
2. Das Modell des Problems sieht folgendermaßen aus:



3. Eine mögliche Lösung des Problems ist: