Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 21. November 2003
Abgabe 1. Dezember 2003

# Übungen zur Vorlesung
# **Modellierung**
# WS 2003/2004
# Blatt 6 Musterlösungen

**AUFGABE 38 :**
Es seien folgende Prädikate gegeben:

- *Person*$(x)$ bedeutet, dass $x$ eine Person ist.
- *Bar*$(x)$ bedeutet, dass $x$ sich in der Bar befindet.
- *bestellt*$(x, y)$ bedeutet, dass $x$ $y$ bestellt.
- *Karte (x)* bedeutet, dass $x$ auf der Speise- / Getränkekarte steht.

Formalisieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe prädikatenlogischer Formeln:

a) Nicht alle Personen befinden sich in der Bar.

b) Jeder Gast bestellt einen Mineralwasser.

c) Manche Besucher bestellen alles, was in der Bar angeboten wird.

d) Wenn in der Bar ein Mineralwasser und ein Bier angeboten werden, bestellt Stefan beide Getränke.

Bestimmen Sie zwei Formeln, die semantische Folgerungen Ihrer Formalisierung sind.

**Lösung:**
Grundsätzliches Vorgehen:
Es gibt zwei sehr häufige Formen von Aussagen, nämlich Regeln und Existenzaussagen.

- Regeln formulieren Eigenschaften für alle Objekte, die gelten sollen, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind.
$$\forall x \ldots ((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta)$$
- Existenzaussagen fordern das Vorhandensein von Objekten mit bestimmten Eigenschaften.
$$\exists x \ldots (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$$

Diese beiden allgemeinen Formen können natürlich auch verschachtelt werden.

Die vier Aussagen können einzeln folgendermaßen formalisiert werden:

a) $\exists x$ (Person$(x) \land \neg$Bar$(x))$

b) $\forall x$ (Person$(x) \land$ Bar$(x) \rightarrow$ bestellt$(x,$ Mineralwasser$))$

c) $\exists x($Person$(x) \land$ Bar$(x) \land \forall z($Karte$(z) \rightarrow$ bestellt$(x, z)))$

d) (Karte(Mineralwasser) $\land$ Karte(Bier))
$\rightarrow$ (bestellt(Stefan, Mineralwasser) $\land$ bestellt(Stefan, Bier))

Semantische Folgerungen der obigen Aussaagen sind z.B.

1. $\forall x$ (Person$(x) \land$ Bar$(x) \rightarrow \exists y$ bestellt$(x, y))$
2. (Karte(Mineralwasser) $\land$ Karte(Bier))
$\rightarrow$ bestellt(Stefan, Mineralwasser)
3. (Karte(Mineralwasser) $\land$ Karte(Bier))
$\rightarrow \exists x \; \exists y$ bestellt$(x, y)$
4. $\forall x$ (Person$(x) \lor \neg$Person$(x))$

**KORREKTURAUFGABE 39** (6 Punkte) **:**
Benutzen Sie folgende Prädikate, um die Behauptungen der nachstehenden Sätze prädikatenlogisch auszudrücken.

- friday_13$(x)$ bedeutet, dass das mit $x$ bezeichnete Objekt ein Freitag der 13. ist.
- accident$(y)$ bedeutet, dass das mit $y$ bezeichnete Objekt ein Unglück ist.
- person$(z)$ bedeutet, dass das mit $z$ bezeichnete Objekt eine Person ist.
- happens$(x, y, z)$ bedeutet, dass am Tag $x$ der Person $z$ das Unglück $y$ zustößt.

a) An irgendeinem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jemanden zustößt.

b) An jedem Freitag den 13. gibt es kein Unglück, das niemandem zustößt.

c) An keinem Freitag den 13. stoßen jemanden alle Unglücke zu.

**Lösung:**
Die drei Aussagen können einzeln folgendermaßen formalisiert werden:

a) $\exists x$ (friday_13$(x) \land \exists y$ (accident$(y) \land \exists z$ (person$(z) \land$ happens$(x, y, z))))$

b) $\forall x$ (friday_13$(x) \rightarrow \neg\exists y$ (accident$(y) \land \forall z$ (person$(z) \rightarrow \neg$happens$(x, y, z))))$

c) $\neg\exists x$ (friday_13$(x) \land \exists z$ (person$(z) \land \forall y$ (accident$(y) \rightarrow$ happens$(x, y, z))))$

Man kann sehr gut erkennen, wie die beiden Aussagetypen Existenzaussage und Allaussage geschachtelt sind.

**KORREKTURAUFGABE 40** (4 Punkte) **:**
Betrachten Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

a) $\forall x\ \exists y\ P(y, x, z)$

b) $\exists y\ (P(y) \land \exists y\ R(y, z) \land Q(y))$

c) $\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x, y)$

d) $\exists x\ (\exists y\ (\exists z\ (P(x, y) \land Q(x, y))))$

- Kennzeichnen Sie alle freien Vorkommen von Variablen (blau unterstrichen).
- Kennzeichnen Sie alle gebundenen Vorkommen von Variablen (grün unterstrichen).
- Zeichnen Sie eine Linienverbindung ausgehend von jeder gebundenen Variable bis zur Variable des bindenden Quantors.
- Zeichnen Sie jeweils einen Kantorowitsch-Baum.

Benutzen Sie keinen Rotstift!

**Lösung:**

1) $\forall x\ \exists y\ P(y, x, z)$

   Bindungen: Erster Quantor mit Variabler $x$ bindet zweites Argument von $P$, zweiter Quantor über $y$ bindet erstes Argument von $P$, $z$ ist freie Variable

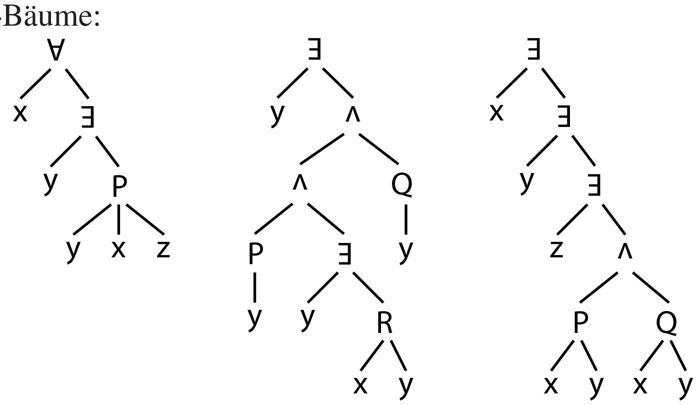
2) $\exists y\ (P(y) \land \exists y\ R(y, z) \land Q(y))$

   Bindungen: Erster Quantor mit Variabler $y$ bindet Argument von $P$ und Argument von $Q$, zweiter Quantor mit Variabler $y$ bindet erstes Argument von $R$, $z$ ist freie Variable

3) $\exists x\ (\exists y\ (\exists z\ (P(x, y) \land Q(x, y))))$

   Bindungen: Erster Quantor über $x$ bindet erstes Argument von $P$ und erstes Argument von $Q$, zweiter Quantor über $y$ bindet zweites Argument von $P$ und zweites Argument von $Q$, dritter Quantor über $z$ bindet kein Variablenvorkommen.

   Kantorowitsch-Bäume:



**AUFGABE 41 :**
Jeder weiß: Nur alte Narren und Kinder sagen die Wahrheit.

*Anna sagt: „Mark lügt.“*
*Mark sagt: „Lisa lügt.“,*
*Lisa sagt: „Anna und Mark lügen.“.*

Was lässt sich über das Alter der drei Personen sagen?

a) Formalisieren Sie diese drei Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik.

b) Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf, anhand der Sie überprüfen, ob es jemanden gibt, der lügt.

c) Formalisieren Sie die drei Aussagen mit Hilfe der Prädikatenlogik.

d) Wie würden Sie anhand der prädikatenlogischen Formalisierung überprüfen, ob eine der drei Personen lügt?

**Lösung:**

a) Zur Formalisierung der Aussagen werden die Atome
*A_lügt* für Anna lügt,
*M_lügt* für Mark lügt und
*L_lügt* für Lisa lügt verwendet.

Es ergeben sich folgende Formeln:

$\alpha = \neg A\_lügt \rightarrow M\_lügt$
$\beta = \neg M\_lügt \rightarrow L\_lügt$
$\gamma = \neg L\_lügt \rightarrow (A\_lügt \wedge M\_lügt)$

Diese Modellierung beschreibt aber nur einen Teil der Inhalte der natürlichsprachlichen Aussagen. Auch die umgekehrte Sicht ist dort nämlich enthalten, dass dann, wenn ein Kind lügt, die Negation der gemachten Aussage richtig sein muss. Dies kann man so formalisieren:

$\alpha' = A\_lügt \rightarrow \neg M\_lügt$
$\beta' = M\_lügt \rightarrow \neg L\_lügt$
$\gamma' = L\_lügt \rightarrow \neg(A\_lügt \wedge M\_lügt)$

b) Um zu überprüfen, ob es jemanden gibt, der lügt, stellt man eine Wahrheitstafel für die Konjunktion der obigen Formeln auf und bestimmt die erfüllenden Bewertungen. An den Bewertungen der Atome für die erfüllenden Bewertungen kann man ablesen, wie viele Personen lügen. Es sei

$\delta = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$

und

$\delta' = \alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma'$

| A_lügt | L_lügt | M_lügt | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\alpha'$ | $\beta'$ | $\gamma'$ | $\delta'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

An den vier erfüllenden Bewertungen der Formel $\delta$, läßt sich ablesen, dass immer mindestens zwei der Personen weder sehr jung noch sehr alt sein können, da diese Personen lügen.

Nimmt man die Formel $\delta'$ noch dazu, so bleibt nur eine erfüllende Bewsertung und wir stellen fest, dass Mark ein Kind oder ein alter Narr sein muss´, da nur er die Wahrheit sagt.

c) Zur Formalisierung mit wird das Prädikat *lügt* verwendet und die Konstanten *Anna*, *Mark* und *Lisa*. Es ergeben sich folgende Formeln:

$\alpha_P = \neg \textit{lügt}(\textit{Anna}) \rightarrow \textit{lügt}(\textit{Mark})$
$\beta_P = \neg \textit{lügt}(\textit{Mark}) \rightarrow \textit{lügt}(\textit{Lisa})$
$\gamma_P = \neg \textit{lügt}(\textit{Lisa}) \rightarrow (\textit{lügt}(\textit{Anna}) \wedge \textit{lügt}(\textit{Mark}))$

Für den zweiten Teil ergibt sich:

$\alpha_P = \textit{lügt}(\textit{Anna}) \rightarrow \neg \textit{lügt}(\textit{Mark})$
$\beta_P = \textit{lügt}(\textit{Mark}) \rightarrow \neg \textit{lügt}(\textit{Lisa})$
$\gamma_P = \textit{lügt}(\textit{Lisa}) \rightarrow \neg(\textit{lügt}(\textit{Anna}) \wedge \textit{lügt}(\textit{Mark}))$

d) Um anhand der prädikatenlogischen Formalisierung zu überprüfen, ob eine der drei Personen lügt, müssen wir diese Frage zunächst formalisieren durch:

$\exists x \ \textit{lügt}(x)$

Dann kann man überprüfen, ob diese Formel eine semantische Folgerung der anderen Formeln ist. Im Rahmen der Vorlesung wurde allerdings kein systematisches Verfahren (z.B. Resolution) vorgestellt, mit dem diese Überprüfung möglich wäre.

**AUFGABE 42 :**
Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit der angegebenen prädikatenlogischen Formalen anhand der gegebenen Interpretationen mit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Grundbereich.

a) Es sei $\Im(P) = \emptyset$ und $\Im(f) = id_{\mathbb{N}}$ (Identitätsfunktion) über $\mathbb{N}$.

$$\alpha \quad = \quad \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$$

b) Es sei $\Im(P) = \{(x,y)\mathbb{N}^2 | x < y\}$.

$$\beta \quad = \quad \forall x \neg P(x,x) \wedge \exists x \forall y P(x,y)$$

c) Es sei $\Im(P) = \{(x,y)\mathbb{N}^2 | x \leq y\}$.

$$\gamma \quad = \quad \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$

Ändern sich die Ergebnisse, wenn der Grundbereich auf die Menge $\{1, 2, ..., 10\}$ beschränkt wird (Interpretation der Prädikate und Funktionen entsprechend angepasst)?

**Lösung:**

a) Es gilt:

$\Im(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt, dass $(id_{\mathbb{N}}(x), id_{\mathbb{N}}(y)) \in \emptyset$ gilt, wenn $(x, y) \in \emptyset$ gilt.

Letztere Aussage ist offensichtlich wahr, da $(id_{\mathbb{N}}(x), id_{\mathbb{N}}(y)) = (x, y)$ gilt. Außerdem ist die die Aussage $(x, y) \in \emptyset$ immer falsch, so dass die Wenn-Dann-Aussage richtig ist. Der Wahrheitswert von $\alpha$ für die angegebene Interpretation ist also 1.

Die Formel ist damit erfüllbar.

b) Es gilt:

$\Im(\beta) = 1 \Leftrightarrow$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass nicht $x < x$, und es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, so dass für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt $x < y$.

Letztere Aussage ist falsch, da einerseits $x < x$ falsch für jedes $x \in \mathbb{N}$ ist, aber dennoch ein $x \in \mathbb{N}$ existieren soll, so dass für alle $y \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch für $x$ gilt $x < y$. Es kann aber $x < x$ nicht gleichzeitig falsch und wahr sein. Der Wahrheitswert von $\beta$ für die angegebene Interpretation ist also 0.

Diese Formel ist sogar unerfüllbar. Der erste Teil beschreibt die Eigenschaft der Irreflexivität. Im zweiten Teil wird aber verlangt, dass auch $P(x, x)$ gilt. Beide Teile zusammen bilden einen Widerspruch.

c) Es gilt:

$\Im(\gamma) = 1 \Leftrightarrow$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \leq x$, und für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \leq z$ gilt, wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ gilt.

Letztere Aussage ist offensichtlich wahr, die $\leq$-Relation ist reflexiv und transitiv über dem Grundbereich der reellen Zahlen $mathbbR$, insbesondere also über $mathbbN$. Der Wahrheitswert von $\gamma$ für die angegebene Interpretation ist also 1.

Diese Formel ist damit erfüllbar.

Die Wahrheitswerte der Formeln unter den entsprechenden Interpretationen mit Grundbereich $\{1, 2, ..., 10\}$ bleiben hier gleich. Die Begründungen für die Wahrheitswerte gelten auch für den so eingeschränkten Grundbereich.
Allerdings muss das im allgemeinen Fall nicht so sein. Man betrachte beispielsweise die mathematische Aussage: „Für alle $x \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y \in \mathbb{N}$ mit $x < y$.“ Diese Ausssage ist wahr, aber für den eingeschränkten Grundbereich $\{1, 2, ..., 10\}$ ist sie falsch.

**AUFGABE 43 :**
Ergänzen Sie für die Formel

$$\alpha = \exists x \forall y (P(x, f(y)) \wedge \neg P(f(x), y))$$

die folgende nur teilweise gegebene Interpretation zu einer erfüllenden Interpretation $\Im$ für $\alpha$.
Teilbewertung $\Im$: $\mathcal{U} = \{1, 2\}$, $f_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $f_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Gibt es noch eine weitere erfüllende Bewertung dieser Art? Wie viele erfüllende Bewertungen dieser Art kann es maximal geben?

**Lösung:**
Es gilt:

$\Im(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in \mathcal{U}$, so dass für alle $y \in \mathcal{U}$ gilt $(x, f_{\mathcal{U}}(y)) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(f_{\mathcal{U}}(x), y) \notin P_{\mathcal{U}}$.

Da wir einen nur zweielementigen Grundbereich $\mathcal{U}$ haben, können wir für $x$ nur zwei Werte wählen: für den einen oder für den anderen muss die Aussage wahr sein. ebenso können wir die beiden Möglichkeiten für $y$ explizit hinschreiben. Daraus ergibt sich:

$\Im(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$
$((1, f_{\mathcal{U}}(1)) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(f_{\mathcal{U}}(1), 1) \notin P_{\mathcal{U}})$ und $((1, f_{\mathcal{U}}(2)) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(f_{\mathcal{U}}(1), 2) \notin P_{\mathcal{U}})$
oder
$((2, f_{\mathcal{U}}(1)) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(f_{\mathcal{U}}(2), 1) \notin P_{\mathcal{U}})$ und $((2, f_{\mathcal{U}}(2)) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(f_{\mathcal{U}}(2), 2) \notin P_{\mathcal{U}})$.

Jetzt können wir die Werte unter der Funktion $f_{\mathcal{U}}$ ausrechnen und erhalten:

$\Im(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$
$((1, 2) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(2, 1) \notin P_{\mathcal{U}})$ und $((1, 1) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(2, 2) \notin P_{\mathcal{U}})$
oder
$((2, 2) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(1, 1) \notin P_{\mathcal{U}})$ und $((2, 1) \in P_{\mathcal{U}}$ und $(1, 2) \notin P_{\mathcal{U}})$.

Damit haben wir zwei mögliche Vervollständigungen für die in der Aufgabenstellung nur teilweise angegebene Interpretation: Wir wählen entweder $P_{\mathcal{U}} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ oder $P_{\mathcal{U}} = \{(2, 1), (2, 2)\}$. So wird insgesamt eine erfüllende Interpretation erreicht.
Alle anderen Möglichkeiten für $P_{\mathcal{U}}$ führen zu einer falsifizierenden Bewertung.