Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 14. November 2003
Abgabe 24. November 2003

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 5

AUFGABE 1 :
Das Wochenende hat Lisa gern für sich. Doch jeden der fünf Werktage verbringt sie mit genau einem ihrer drei Freunde. Wen Lisa nächste Woche wann sieht, hat sie so festgelegt:

1. Sehe ich am Donnerstag Andreas oder Jörg, so treffe ich Philipp am Dienstag.
2. Halte ich am Mittwoch Jörg in den Armen, so werde ich den Freitag entweder Philipp oder Jörg widmen.
3. Treffe ich Philipp am Donnerstag nicht, dann bin ich auch am Mittwoch nicht bei ihm.
4. Sehe ich Philipp am Montag, dann werde ich, sofern ich mit Andreas am Dienstag kein Rendezvous habe, Philipp auch am Donnerstag treffen.
5. Schließe ich Dienstag Andreas in die Arme, so soll Jörg, wenn nicht schon am Mittwoch, dann am Donnerstag mein Liebhaber sein.
6. Nur wenn Andreas am Freitag an der Reihe ist, schenke ich Jörg am Montag meine Gunst.
7. Falls ich mit Andreas weder für Montag noch für Dienstag verabredet bin, werde ich ihn auch am Mittwoch nicht sehen.

Formalisieren Sie die Regeln mittels Aussagenlogik.

Lösung:
Als Menge atomarer Formeln definieren wir:

$$\{x_y \mid x \in \{\text{A, J, P}\} \text{ und } y \in \{\text{Mo, Di, Mi, Do, Fr}\}\}.$$

Die Semantik ist in naheliegender Weise gemäß den Anfangsbuchstaben der Personen und den Wochentagskürzeln definiert:

$$\begin{aligned} \text{A}_{\text{Di}} &= \text{„Andreas am Donnerstag“} \\ \text{P}_{\text{Mo}} &= \text{„Philipp am Montag“} \\ \text{J}_{\text{Mi}} &= \text{„Jörg am Mittwoch“} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Regeln lassen sich dann folgendermaßen formalisieren:

1. $(\mathrm{A}_{\mathrm{Do}} \vee \mathrm{J}_{\mathrm{Do}}) \rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{Di}}$
2. $\mathrm{J}_{\mathrm{Mi}} \rightarrow (\mathrm{J}_{\mathrm{Fr}} \vee \mathrm{P}_{\mathrm{Fr}})$
3. $\neg \mathrm{P}_{\mathrm{Do}} \rightarrow \neg \mathrm{P}_{\mathrm{Mi}}$ (bzw. $\mathrm{P}_{\mathrm{Mi}} \rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{Do}}$)
4. $(\mathrm{P}_{\mathrm{Mo}} \wedge \neg \mathrm{A}_{\mathrm{Di}}) \rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{Do}}$
5. $\mathrm{A}_{\mathrm{Di}} \rightarrow (\mathrm{J}_{\mathrm{Mi}} \vee \mathrm{J}_{\mathrm{Do}})$
6. $\mathrm{J}_{\mathrm{Mo}} \rightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{Fr}}$
7. $(\neg \mathrm{A}_{\mathrm{Mo}} \wedge \neg \mathrm{A}_{\mathrm{Di}}) \rightarrow \neg \mathrm{A}_{\mathrm{Mi}}$

AUFGABE 2 :
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Zu jeder erfüllbaren Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom der Formel mit 0 bewertet.
2. Zu jeder tautologischen Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom der Formel mit 1 bewertet.
3. Jede Teilformel einer erfüllbaren Formel ist selbst wieder eine erfüllbare Formel.
4. Jede Teilformel einer tautologischen Formel ist selbst wieder eine tautologische Formel.
5. Jede Teilformel einer tautologischen Formel ist selbst eine erfüllbare Formel.
6. Enthält eine Formel eine widerspruchsvolle Teilformel, so ist sie insgesamt auch widerspruchsvoll.
7. Zu jeder widerspruchsvollen Formel gibt es eine Bewertung, die eine Teilformel mit 1 bewertet.
8. Zu jeder erfüllbaren Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel, die falsifizierbar ist.
9. Zu jeder Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel, die mindestens ein Atom enthält, das in der ersten Formel nicht vorkommt.

Lösung:

1. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung erfolgt durch Angabe eines Gegenbeispiels:
   Sei A ein Atom. Die aussagenlogische Formel $\alpha = A$ ist erfüllbar mit der Bewertung $\Im(A) = 1$. Für die Atome der Formel α ist dies die einzige erfüllende Bewertung. Also gilt für α die Behauptung nicht.

2. Die Behauptung ist **richtig**.

   Beweis:
   Sei α eine tautologische Formel. Dann ist *jede* Bewertung $\Im$ eine erfüllende Bewertung, d.h. für alle Bewertungen $\Im$ gilt $\Im(\alpha) = 1$. Daher gilt z.B. auch für die Bewertung $\Im_1$, die alle Atome mit 1 bewertet, $\Im_1(\alpha) = 1$. Also gilt die Behauptung.

3. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung erfolgt durch Angabe eines Gegenbeispiels:
   Sei A ein Atom. Die aussagenlogische Formel $\alpha = A \vee (A \wedge \neg A)$ ist erfüllbar mit der Bewertung $\Im(A) = 1$. Die Teilformel $\beta = A \wedge \neg A$ ist jedoch widerspruchsvoll, da für jede Bewertung von A die Formel β den Wahrheitswert 0 zugewiesen bekommt. Also gilt für α die Behauptung nicht.

4. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung erfolgt durch Angabe eines Gegenbeispiels:
   Sei A ein Atom. Die aussagenlogische Formel $\alpha = A \vee \neg A$ ist eine Tautologie, d.h. für jede Bewertung von A bekommt die Formel α den Wahrheitswert 1 zugewiesen. Die Teilformel $\beta = A$ ist zwar erfüllbar, aber nicht tautologisch. Also gilt für α die Behauptung nicht.

5. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung erfolgt durch Angabe eines Gegenbeispiels:
   Sei A ein Atom. Die aussagenlogische Formel $\alpha = (A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$ ist tautologisch, wie man schnell überprüfen kann. Die Teilformel $\beta = A \wedge \neg A$ ist jedoch widerspruchsvoll. Also gilt für α die Behauptung nicht.

6. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung kann mit dem Gegenbeispiel der vorstehenden Teilaufgabe erfolgen.

7. Die Behauptung ist **richtig**.

   Beweis:
   Sei α eine widerspruchsvolle Formel. Dann ist *jede* Bewertung $\Im$ eine falsifizierende Bewertung, d.h. für alle Bewertungen $\Im$ gilt $\Im(\alpha) = 0$. Daher gilt auch für die Bewertung $\Im_1$, die alle Atome mit 1 bewertet, $\Im_1(\alpha) = 0$. Da die Atome von α auch Teilformeln von α sind, folgt die Behauptung.

8. Die Behauptung ist **falsch**.

   Die Widerlegung erfolgt durch Angabe eines Gegenbeispiels:
   Sei A ein Atom. Die aussagenlogische Formel $\alpha = A \vee \neg A$ ist eine Tautologie, also ist α auch erfüllbar. Sei β eine zu α logisch äquivalente Formel, also $\beta \approx \alpha$. Dann gilt für jede Bewertung $\Im$ die Gleichungskette

   $$\Im(\beta) \underset{(\alpha \approx \beta)}{=} \Im(\alpha) \underset{\alpha \text{ Tautologie}}{=} 1$$

   Also ist auch β eine Tautologie und damit nicht falsifizierbar. Also gilt für α die Behauptung nicht.

9. Die Behauptung ist **richtig**.

   Beweis:
   Sei α eine Formel und A ein Atom, das in α nicht vorkommt. Sei $\beta = \alpha \wedge (A \vee \neg A)$. Da die Teilformel $(A \vee \neg A)$ von β tautologisch ist, gilt $\alpha \approx \beta$, wie man anhand der Definition der logischen Äquivalenz leicht überprüfen kann. Also gilt die Behauptung.

AUFGABE 3 :
α und β seien aussagenlogische Formeln. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen:

a) $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll

b) $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx \alpha \wedge \beta$

Lösung:

a) Gelte $\alpha \models \beta$, d. h. für alle Bewertungen $\Im$ gilt: ($\Im(\alpha) = 1$ impliziert $\Im(\beta) = 1$). Also folgt $\Im(\neg\alpha \vee \beta) = 1$ und damit $\Im(\neg(\neg\alpha \vee \beta)) = 0$. Außerdem gilt $\Im(\neg(\neg\alpha \vee \beta)) = \Im(\alpha \wedge \neg\beta)$. Daraus folgt $\Im(\alpha \wedge \neg\beta) = 0$, d. h. $(\alpha \wedge \neg\beta)$ ist widerspruchsvoll. Die umgekehrte Richtung ist offensichtlich auch korrekt.

b) Die folgende Äquivalenzkette gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha \models \beta \\ \Leftrightarrow\ & \text{Für alle Bewertungen } \Im \text{ gilt} : \Im(\alpha) = 1 \Rightarrow \Im(\beta) = 1. \\ \Leftrightarrow\ & \text{Für alle Bewertungen } \Im \text{ gilt} : \Im(\alpha) = 0 \text{ oder } \Im(\beta) = 1. \end{aligned}$$

   Außerdem gilt nach Definition der logischen Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & \alpha \approx \alpha \wedge \beta \\ \Leftrightarrow\ & \text{Für alle Bewertungen } \Im \text{ gilt} : \Im(\alpha) = \Im(\alpha \wedge \beta). \end{aligned}$$

   Wir zeigen die Äquivalenz der jeweils letzten Aussagen. Sei nun $\Im$ eine Bewertung.

   „$\Rightarrow$“:
   Gilt $\Im(\alpha) = 0$, so folgt sofort $\Im(\alpha \wedge \beta) = 0$. Gilt $\Im(\alpha) = 1$, so folgt mit $\Im(\beta) = 1$ ebenfalls sofort $\Im(\alpha \wedge \beta) = 1$.

   „$\Leftarrow$“:
   Gilt $\Im(\alpha) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Es gelte daher $\Im(\alpha) = 1$ und damit auch $\Im(\alpha \wedge \beta) = 1$. Aus letzterem folgt $\Im(\beta) = 1$ nach Definition der Bewertung für Konjunktionen.

AUFGABE 4 :
Nachdem Hänsel und Gretel die Hexe in den Ofen gestoßen haben, wollen sie sich über das Knusperhäuschen hermachen. Doch wie allgemein bekannt ist, muss man beim Verspeisen eines solchen Hauses sehr vorsichtig sein, da diese Häuser zur Instabilität neigen. Die beiden Kinder wenden sich zunächst einer Wand zu, die aus drei Lebkuchen besteht. Da Hänsel erfolgreich Knusperhäuschenarchitektur studiert hat, erkennt er, dass folgende Regeln aus Sicherheitsgründen unbedingt einzuhalten sind:

1. Man darf höchstens einen der beiden ersten Lebkuchen entfernen.
2. Wenn man den dritten entfernt, muss man auch den zweiten entfernen.
3. Wenn man den zweiten entfernt und den ersten nicht, dann darf man den dritten nicht entfernen.

Da Gretel in Logik aufgepasst hat, weiß sie, dass man vom dritten Lebkuchen besser die Finger lässt.

a) Formalisieren Sie die drei Regeln als aussagenlogische Formeln α, β und γ. Verwenden Sie hierbei folgende Abkürzungen für die Teilaussagen:

A	=	„ersten Lebkuchen entfernen“
B	=	„zweiten Lebkuchen entfernen“
C	=	„dritten Lebkuchen entfernen“

b) Zeigen Sie, dass Gretels Wissen eine semantische Folgerung aus den drei Regeln ist.

Lösung:

a) $\alpha = \neg(A \wedge B)$
$\beta = C \rightarrow B$
$\gamma = (\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C$

b) Es ist die Gültigkeit der semantischen Folgerung

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \neg C$$

zu überprüfen.

Eine Folgerung $\varphi \models \psi$ kann überprüft werden, indem wir $\varphi \wedge \neg\psi$ auf Widerspruch testen (vgl. Aufgabe 3a)). Im vorliegenden Fall ist demnach zu entscheiden, ob die aussagenlogische Formel

$$(\neg(A \wedge B)) \wedge (C \rightarrow B) \wedge ((\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C) \wedge C$$

widerspruchsvoll ist. Dies ist z.B. mit Hilfe einer Wahrheitstabelle möglich:

A	B	C	$\alpha = \neg(A \wedge B)$	$\beta = C \rightarrow B$	$\gamma = (\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C$	$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge C$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

Die Wahrheitstafel zeigt, dass die Formel $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge C$ widerspruchsvoll ist (letzte Spalte enthält ausschließlich Nullen); die semantische Folgerungsbeziehung $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \neg C$ ist damit gültig.

KORREKTURAUFGABE 5 (4 Punkte) **:**
Tragen Sie in die Felder der nachfolgenden Tabelle ein, ob aus der Formel in der aktuellen Zeile die Formel in der aktuellen Spalte semantisch folgt. Verwenden Sie die Einträge

$\models$ für semantische Folgerung (Zeilenformel $\models$ Spaltenformel) und

X für keine Folgerung (Zeilenformel $\not\models$ Spaltenformel).

Leere Felder gelten als unbearbeitet. Jeder falsche Eintrag bewirkt einen Abzug von 0.5 Punkten von den erreichten Punkten in dieser Aufgabe bis hin zu 0 Punkten (keine negativen Punkte).

	$Q \to \neg P$	$P \lor \neg Q$	$P \lor Q$	$\neg(Q \land \neg Q)$
P	X	$\models$	$\models$	$\models$
$P \to \neg Q$	$\models$	X	X	$\models$
$P \land \neg P$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
$P \land Q$	X	$\models$	$\models$	$\models$
$\neg(P \lor Q)$	$\models$	$\models$	X	$\models$

Lösung:
Die angegebenen Folgerungsbeziehungen kann man an einer Wahrheitstafel für die Formeln ablesen:

P	Q	$P \to \neg Q$	$P \land \neg P$	$P \land Q$	$\neg(P \lor Q)$	$Q \to \neg P$	$P \lor \neg Q$	$P \lor Q$	$\neg(Q \land \neg Q)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1

KORREKTURAUFGABE 6 (6 Punkte) **:**
Bringen Sie folgende aussagenlogische Formeln zuerst in Negationsnormalform, dann in konjunktive Normalform. Geben Sie Zwischenschritte bei der Umformung an und benennen Sie die angewandten Umformungsgesetze. Kennzeichnen Sie die NNF und die KNF.

a) $\alpha = \neg((A \to (B \land \neg C)) \to \neg(\neg A \lor (B \land C)))$

b) $\beta = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

c) $\gamma = (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

Lösung:
Bei der Transformation in eine logisch äquivalente NNF bzw. KNF werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Ersetze die Äquivalenzen: $\alpha \leftrightarrow \beta \approx (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha)$

2. Ersetze die Implikationen: $\alpha \to \beta \approx \neg\alpha \lor \beta$

3. Wende die DeMorgan'schen Regeln an, um die Negationszeichen vor die Atome zu ziehen: $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$ und $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$

   Fasse dabei doppelte Negationszeichen zusammen, wann immer es möglich ist: $\neg\neg\alpha \approx \alpha$

   Ist keine DeMorgan'sche Regel mehr in der Richtung von links nach rechts anwendbar und auch keine Zusammenfassung mehr möglich, so liegt eine zur Ausgangsformel logisch äquivalente NNF vor.

4. Wende das Distributivgesetz an, um die Konjunktionen nach außen zu ziehen: $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

   Es gilt natürlich auch so herum: $(\beta \wedge \gamma) \vee \alpha \approx (\beta \vee \alpha) \wedge (\gamma \vee \alpha)$

   Ist das Distributivgesetz in der Richtung von links nach rechts nicht mehr anwendbar, so liegt eine zur Ausgangsformel logisch äquivalente KNF vor.

Die Transformation in eine logisch äquivalente DNF verlaufen analog zu denen bei der Transformation in eine KNF, außer dass das andere Distributivgesetz verwendet wird: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

a)
$$\begin{array}{rcll}
\alpha & = & \neg((A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \rightarrow \neg(\neg A \vee (B \wedge C))) & \\
& \approx & \neg(\neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee \neg(\neg A \vee (B \wedge C))) & \\
& \approx & \neg\neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge \neg\neg(\neg A \vee (B \wedge C)) & \\
& \approx & (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee (B \wedge C)) & \text{NNF} \\
& \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) & \text{KNF}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcll}
\beta & = & (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C & \\
& \approx & (((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))) & \\
& \approx & (\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee C) \wedge (\neg C \vee ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))) & \\
& \approx & ((\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A)) \vee C) \wedge (\neg C \vee ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))) & \\
& \approx & (((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A)) \vee C) \wedge (\neg C \vee ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))) & \\
& \approx & ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee C) \wedge (\neg C \vee ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))) & \text{NNF} \\
& \approx & ((A \wedge \neg B) \vee ((B \vee C) \wedge (\neg A \vee C))) \wedge ((\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee A)) & \\
& \approx & ((A \wedge \neg B) \vee (B \vee C)) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C)) \wedge & \\
& & ((\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee A)) & \\
& \approx & (A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg A \vee C) \wedge & \\
& & (\neg B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee A) & \text{KNF}
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcll}
\gamma & = & (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) & \\
& \approx & \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg A) & \\
& \approx & (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg A) & \\
& \approx & (A \wedge \neg B) \vee ((A \wedge B) \vee \neg A) & \text{NNF} \\
& \approx & (A \wedge \neg B) \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A)) & \\
& \approx & (A \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A))) \wedge (\neg B \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A))) & \\
& \approx & (A \vee A \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A) & \text{KNF}
\end{array}$$

Hinweis: In b) und c) können tautologische Klauseln noch entfernt werden, für die Aufgabenstellung ist dies aber nicht erforderlich.