Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 31. Oktober 2003
Abgabe 10. November 2003

Übungen zur Vorlesung

Modellierung

WS 2003/2004

Blatt 3

AUFGABE 17 :
Gib an (und begründe!), welche der folgenden Eigenschaften die hier als Matrix dargestellten Relationen aufweisen und welche nicht: Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Konnexität, Alternativität, Rechtseindeutigkeit, Linkseindeutigkeit, Rechtstotalität, Linkstotalität.

a.)

R	1	2	3	4	5	6
1	+				+	
2		+				+
3	+		+			
4		+		+		
5			+		+	
6				+		+

b.)

R	1	2	3	4	5	6
1			+			
2				+		
3		+				
4	+					
5						+
6					+	

c.)

R	1	2	3	4	5	6
1		+				
2		+				
3		+				
4		+				
5		+				
6		+				

d.)

R	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	+	+	+	+	+	+
4						
5						
6						

Lösung:
Auf Folie 2.22-1 und 2.22-2 sind Regeln angegeben, nach denen sich die einzelnen Eigenschaften den Matrixen zuordnen lassen.

a) Die Funktion ist reflexiv, da die Relation für die Diagonale gilt ((1,1), (2,2). ... sind in der Relation). Damit ist sie nicht irreflexiv.
Die Funktion ist Antisymmetrisch, da von zwei Punkten, die zur Diagonalen symmetrisch sind, max. eins ein +-Zeichen enthält (z.B. (5,1) ist gesetzt, (1,5) aber nicht). Daher ist sie nicht symmetrisch. Sie ist auch nicht asymmetrisch, da sie nicht irreflexiv ist. Ebensowenig ist sie konnex, denn es gibt symetrische Paare, für die die Realtion nicht gilt (z.B. sind weder (2,3) noch (3,2) Teil der Relation). Damit kann sie auch nicht Alternativ sein.
Die Relation ist nicht rechtseindeutig, da es Zeilen gibt, in denen es mehr als ein Kreuz gibt

(gilt sogar für jede Zeile). Ebensowenig ist sie Linkseindeutig, da es auch spalten mit mehr al einem Kreuz gibt (auch wieder jede Spalte). Sie ist aber Rechsttotalitär, da es pro Spalte mindestens ein Kreuz gibt und auch Linkstotalitär, da es pro Zeile auch ein Kreuz gibt.

b) Die Relation ist irreflexiv, da es auf der Diagonalen kein Kreuz gibt. Damit ist sie nicht reflexiv.
Die Relation ist nicht symmetrisch, da es Punkte mit Kreuzen gibt, deren symetrische Punkt kein Kreuz enthalten (z.B. (3,1) ist Teil der Realation, (1,3) aber nicht). Es gibt aber auch ein Feld mit einem Kreuz, dessen symmetrisches Gegenüber auch gilt ((5,6) und (6,5)), wesshalb die Relation weder asymmetrisch noch antisymmetrisch ist. Sie ist auch nicht konnex, da es symmetrische Feldpaare gibt, bei denen keins von beiden Teil der Relation ist ((1,2) und (2,1)), weshalb sie auch nicht alternativ sein kann.
Die Relation ist rechtseindeutig, denn es gibt in jeder Zeile max. ein Kreuz gibt und linkstotal, das es in jeder Zeile auch mind. ein Kreuz gibt (also genau eins :-). Die Relation ist auch linkseindeutig und rechtotal, das es in jeder Spalte auch genau ein Kreuz gibt.

c) Rie Relation ist nicht reflexiv, da es Felder auf der Diagonalen gibt, für die die Relation nicht gilt (z.B. (1,1)). Sie ist auch nicht irreflexiv, da es auch mind. ein Feld auf der Diagonalen gibt, für das die Relation gilt ((2,2) ist das einzige).
Die Relation ist nicht symmetrisch, da es Felder mit Kreuzen gibt, deren symmetrische Felder keine Kreuze haben ((1,2) ist in der Relation, (2,1 aber nicht). Da die Relation nicht irreflexiv ist, kann sie auch nicht asymmetrisch sein. Sie ist aber antisymmetrisch, da es mit Ausnahme der Diagonalen keine symmetrischen Paare in der Relation gibt. Sie ist nicht konnex, da es symmetrische Feldpaare gibt, bei denen keins von beiden ein Kreuz enthält (z.B. (5,4) und (4,5)), weshalb sie auch nicht alternativ sein kann.
Die Relation ist rechtseindeutig und linkstotal, da es in jeder Zeile genau ein Kreuz gibt. Sie ist nicht linkseindeutig, da es Spalten mit mehr als einem Kreuz gibt, und auch nicht rechtstotal, da es auch Spalten ohne Kreuz gibt.

d) Rie Relation ist nicht reflexiv, da es Felder auf der Diagonalen gibt, für die die Relation nicht gilt (z.B. (1,1)). Sie ist auch nicht irreflexiv, da es auch mind. ein Feld auf der Diagonalen gibt, für das die Relation gilt ((3,3) ist das einzige).
Die Relation ist nicht symmetrisch, da es Felder mit Kreuzen gibt, deren symmetrische Felder keine Kreuze haben ((1,3) ist in der Relation, (3,1 aber nicht). Da die Relation nicht irreflexiv ist, kann sie auch nicht asymmetrisch sein. Sie ist aber antisymmetrisch, da es mit Ausnahme der Diagonalen keine symmetrischen Paare in der Relation gibt. Sie ist nicht konnex, da es symmetrische Feldpaare gibt, bei denen keins von beiden ein Kreuz enthält (z.B. (5,4) und (4,5)), weshalb sie auch nicht alternativ sein kann.
Die Relation ist nicht rechtseindeutig, da es Zeilen mit mehr als einem Kreuz gibt, und auch nicht linkstotal, da es auch Zeilen ohne Kreuz gibt. Die Relation ist linkseindeutig und rechtstotal, da es in jeder Zeile genau ein Kreuz gibt.

AUFGABE 18 :
Überprüfe, ob die folgenden Funktionen total, partiell, injektiv, surjektiv oder bijektiv sind (D ist der Definitionsbereich und B der Bildbereich):

a) Identitätsfunktion id_M

b) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$

c) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$

Lösung:
Die Folien 2.27 und 2.28 definieren die Begriffe total, partiell, injektiv, surjektiv und bijektiv.

a) Die Identitätsfunktion ist die Funktion, die zu jedem Wert den selben Wert zurück liefert, also f(x) = x. Der Definitionsbereich ist gleich dem Bildbereich.

   Die Funktion ist total. Damit die Funktion nicht total sein könnte, müsste es ein x geben, zu welchem f(x) keinen Wert aus dem Bildbereich liefert. Da aber f(x) wieder x ist und der Bildbereich gleich dem Definitionsbereich, könnte so ein x auch schon nicht im Definitionsbereich gewesen sein (Widerspruch). Damit ist die Funktion total, und somit nicht partiell.

   Die Funktion ist injektiv, denn es gibt kein y ∈ B, für welches es ein x_1, x_2 ∈ D mit f(x_1) = y und f(x_2) = y und x ≠ y gibt. Denn, da f(x) = x, müsste gelten, dass x_1 = y und X_2 = y, somit also x_1 = x_2 (Widerspruch).
   Die Funktion ist auch surjektiv, denn zu jedem Element y der Bildmenge gibt es auch ein Element x der Definitionsmenge mit f(x) = y. Nach Definition von f gilt y = x (siehe Beweis der Totalität).
   Da die Funktion injektiv und surjektiv ist, ist sie auch bijektiv.

b) Die Funktion f(x) = x^2 mit $D = (N) und B = (N)$ ist total, da es zu jedem x ein y = x^2 gibt und y ∈ B. Damit ist die Funktion nicht partiell.

   Die Funktion ist Injektiv, denn es gibt zu jedem y ∈ B nur ein x ∈ D mit f(x) = y. Die Umkehrfunktion von f(x) = x^2 ist $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$. Da aber D nur positive Zahlen umfaßt, gibt es zu jedem y ∈ B nicht mehr als ein x ∈ D.
   Die Funktion ist nicht surjektiv, denn nicht zu jedem y ∈ B gibt es auch ein x ∈ D mit f(x) = y. Ein Beispiel ist y = 2.
   Da f(x) nicht surjektiv ist, ist die Funktion auch nicht bijektiv.

c) Die Funktion f(x) = x^2 mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$ ist total, da es zu jedem x ein y = x^2 gibt und y ∈ B. Damit ist die Funktion nicht partiell.

   Die Funktion ist nicht injektiv, denn es gibt y ∈ B zu denen es ein x_1, x_2 ∈ D mit f(x_1) = y und f(x_2) = y und x ≠ y gibt. Ein Beispiel ist y = 4, x_1 = 2 und x_2 = -2.
   Die Funktion ist surjektiv, denn die Umkehrfunktion ist über dem Bildbereich der Orginalfunktion definiert. Zu jedem y ∈ B gibt es mindestens ein x ∈ D mit f(x) = y (x = $\pm\sqrt{y}$).
   Da die Funktion nicht injektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

d) Die Funktion f(x) = $\sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$ ist nicht total, denn negative Zahlen sind zwar im Definitionsbereich, für diese ist die Funktion aber nicht definiert. Damit ist die Funktion partiell.

Die Funktion ist injektiv, denn es gibt zu jedem y $\in$ B maximal ein x $\in$ D mit f(x) = y. Die Umkehrfunktion von f(x) ist $f^{-1}(y) = x^2$. Diese Funktion liefert für jedes y $\in (R)^+$ genau ein Ergebnis.
Da die Umkehrfunktion gena ein Ergebnis liefert, ist die Funktion aus surjektiv.
Da die Funktion injektiv und surjektiv ist, ist sie auch bijektiv.

AUFGABE 19 :
Anja, Franka, Franz und Martin gehen zum Burger King essen. Dort gibt es 8 Menus (Menu 1 bis Menu 8). Modelliere mögliche Bestellungen mittels Funktionen. Gehe dabei folgende Schritte durch:

a) Definiere die Mengen Personen und Essen und gib den Wertebereich von Funktionen an, die jedem ein Menu zuordnen. Bestimme die Kardinalitäten der Mengen.

b) Gib die Funktion an, die Anja Menu 3, Franka Menu 5, Franz Menu 2 und Martin Menu 7 zuweist.

c) Anja hat doch keinen Hunger. Erweitere das Modell so, dass es ihr (und jedem anderen) möglich ist, auch nichts zu bestellen.

d) Martin ist ganz besonders hungrig. Erweitere das Modell so, dass es ihm (und jedem anderen) möglich ist, mehrere Gerichte (auch gleiche) zu bestellen.

Lösung:

a) Personen = {Anja, Franka, Franz, Martin}
Essen = {Menu 1, Menu 2, Menu 3, Menu 4, Menu 5, Menu 6, Menu 7, Menu 8}
Wertebereich der Funktionen: Personen $\rightarrow$ Essen
Kardinalität (siehe Folie 2.30): $(|B| + 1)^{|D|} = 8^4 = 4096$

b) Bestellungen1: Personen $\rightarrow$ Essen
Bestellung1 = {(Anja, Menu 3), (Franka, Menu 5), (Franz, Menu 2), (Martin, Menu 7)}

c) Personen $\rightarrow$ Essen $\cup$ {nichts}

d) Personen $\rightarrow$ $\mathcal{P}$(Essen $\times \mathbb{N}_0$ oder
Personen $\rightarrow$ (Essen $\rightarrow$ $(N)_0$)

AUFGABE 20 :
Prüfe, ob mit der Signatur $\Sigma = (S, F)$ mit $S = (\mathbb{R}, \mathbb{N}, \text{BOOLEAN})$ und
$F = (\text{add} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{div} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{betrag} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{isGanzzahlig} : \mathbb{R} \rightarrow \text{BOOLEAN},$
$\text{shift} : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R})$ die folgenden Terme korrekt sind.

a) $\text{isGanzzahlig}(\text{shift}(\text{add}(0.7, 8.6), 3), \text{betrag}(\text{add}(4, -7)))$

b) div(add($9.6, 0.2$), shift(div($3.6, 1.2$), add($2, 4$)))

c) isGanzzahlig(add(9.6, div($9.8, 6.2$)))

Lösung:

a) Der Term ist nicht korrekt. Die Funktion isGanzzahlig darf nach Definition nur einen Parameter bekommen. In dem Term bekommt sie aber zwei.

b) Der Term ist nicht korrekt. Die Funktion shift erwartet zwei Parameter. Der erste Parameter muss aus $\mathbb{R}$ stammen. Dieser ist in Ordnung. Der zweite Parameter muss allerdings aus $\mathbb{N}$ stammen. Die Funktion add liefert allerdings einen Wert aus $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$ ist der Term ungültig.

c) Dieser Term ist korrekt.

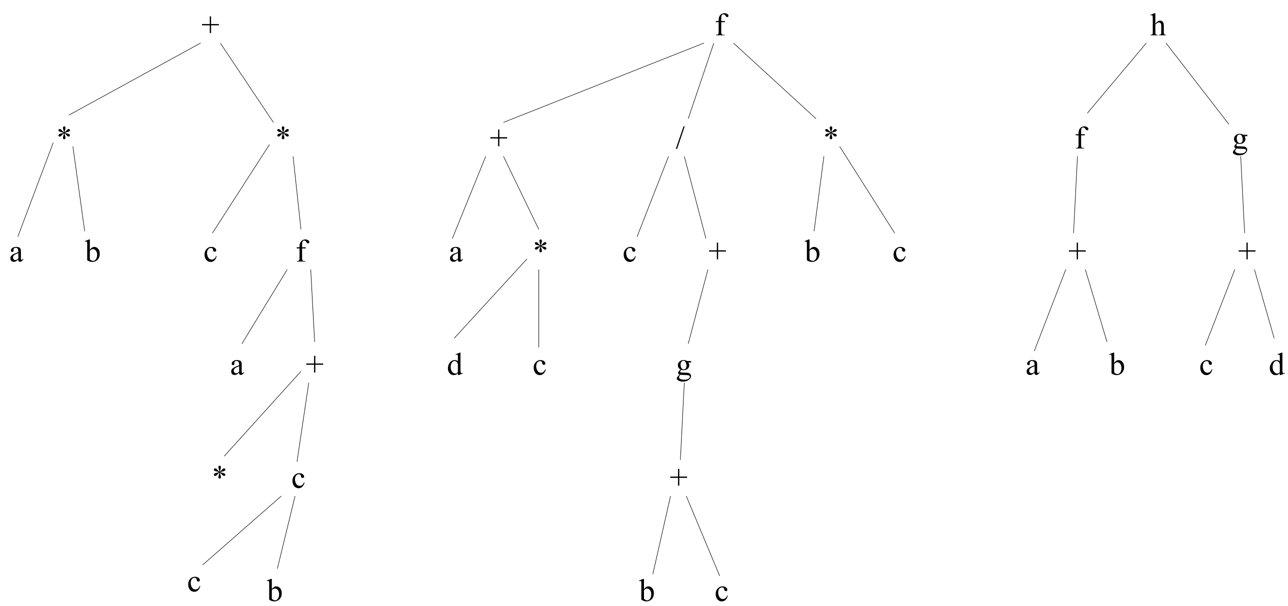
AUFGABE 21 :
Zeichne die Kantorowitsch-Bäume für folgende Terme und bestimme die Präfix- und die Postfixform:

a) $a * b + c * f(a, c * b + c)$

b) $f(a + d * c, c/(a + g(b + c)), b * c)$

c) $h(f(a + b), g(c + d))$

Lösung:



AUFGABE 22 :
Bestimme mit den Substitutionen $\sigma_1 = [x/f(z,y,x)]$, $\sigma_2 = [y/f(x,z,y)]$ und $\sigma_3 = [z/f(x,y,z)]$ die Ergebnisse der folgenden zusammengesetzten Substitutionen. Gib dabei auch die Gesamtsubstitution der hintereinander auszuführenden Einzelsubstitutionen an.

a) $f(x,y,z)\sigma_3\sigma_1\sigma_3$

b) $f(x,y,z)\sigma_1\sigma_3\sigma_2$

c) $f(x,y,z)\sigma_3\sigma_3\sigma_2$

Lösung:

a) $f(x,y,z)\sigma_3\sigma_1\sigma_3 =$
$f(x,y,f(x,y,z))\sigma_1\sigma_3 =$
$f(f(z,y,x),y,f(f(z,y,x),y,z))\sigma_3 =$
$f(f(f(x,y,z),y,x),y,f(f(f(x,y,z),y,x),y,f(x,y,z)))$

$[z/f(x,y,z)][x/f(z,y,x)][z/f(x,y,z)] =$
$[z/f(f(z,y,x),y,z),x/f(z,y,x)][z/f(x,y,z)] =$
$[z/f(f(f(x,y,z),y,x),y,f(x,y,z)),x/f(f(x,y,z),y,x)]$

b) $f(x,y,z)\sigma_1\sigma_3\sigma_2 =$
$f(f(z,y,x),y,z)\sigma_3\sigma_2 =$
$f(f(f(x,y,z),y,x),y,f(x,y,z))\sigma_2 =$
$f(f(f(x,f(x,z,y),z),f(x,z,y),x),f(x,z,y),f(x,f(x,z,y),z))$

$[x/f(z,y,x)][z/f(x,y,z)][y/f(x,z,y)] =$
$[x/f(f(x,y,z),y,x),z/f(x,y,z)][y/f(x,z,y)] =$
$[x/f(f(x,f(x,z,y),z),f(x,z,y),x),z/f(x,f(x,z,y),z),y/f(x,z,y)]$

c) $f(x,y,z)\sigma_3\sigma_3\sigma_2 =$
$f(x,y,f(x,z,y))\sigma_3\sigma_2 =$
$f(x,y,f(x,f(x,y,z),y))\sigma_2 =$
$f(x,f(x,z,y),f(x,f(x,f(x,z,y),z),f(x,z,y)))$

$[z/f(x,y,z)][z/f(x,y,z)][y/f(x,z,y)] =$
$[z/f(x,y,f(x,y,z))][y/f(x,z,y)] =$
$[z/f(x,f(x,z,y),f(x,f(x,z,y),z)),y/f(x,z,y)]$

KORREKTURAUFGABE 23 (10 Punkte) **:**
Gegeben seien die folgenden Axiome mit den Variablen x,y,z:

i) (x * z) + (y * z) = (x + y) * z

ii) f(x, y) = x * y

iii) z * f(x, y) = f(z + x, y)

Überprüfe, ob die folgenden Termgleichungen durch die korrekte Anwendung der Axiome auf den jeweils linken Term entstehen können. Hier bezeichnen a, b, c Konstanten und u, v, w Variablen. Falls ja, welche der Axiome müssen dann jeweils eingesetzt werden und welche Matching Substitution ist jeweils auf das Axiom anzuwenden?
Falls nein, zu welchen Termen kommt man mit maximal drei Axiomanwendungen auf den linken Term? Gib jeweils die Axiome an.

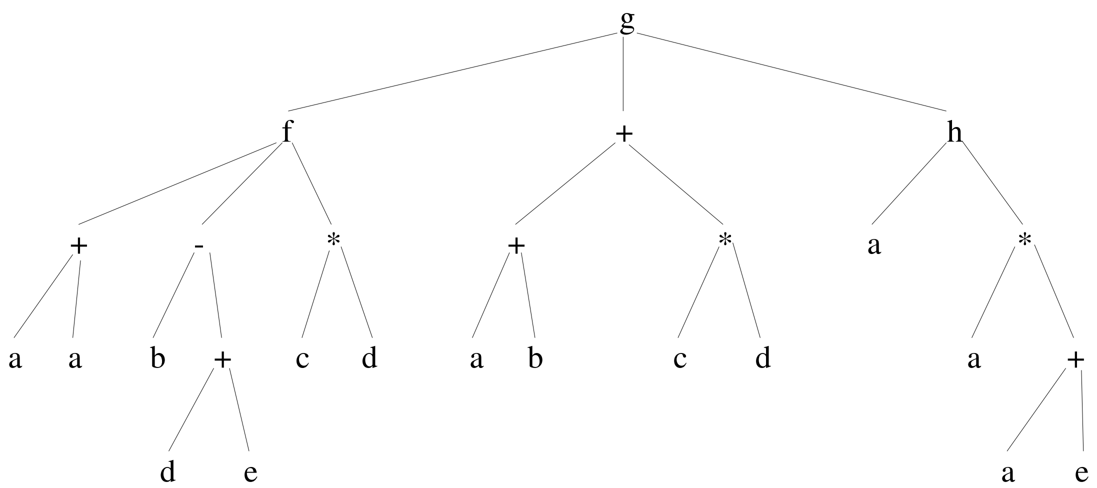
a) $(a * c) + (b * c) = a * b * c$

b) $(u * w) * f(v * w, u) = f((u + v) * w), u)$

c) $(v + w) * f(w, a) = f(u * w, a)$

d) $(u - v) * f(v + w, w) = (u + w) * w$

AUFGABE 24 :
Wie lautet der Term zu folgendem Kantorowitsch-Baum?



Lösung:
g(f(a+a,b-d+e,c*d),a+b+c*d,h(a,a*(a+e)))